南京气象学院学报
一九八〇年　第二期

关于地转适应过程中能量变化与扰动水平尺度间关系的一点初步看法

金飞飞*

地转适应过程就是指地转平衡破坏以后的气压场和风场作迅速调整重新达到地转平衡的过程。对于这种过程，已经有了比较充分的研究[1]，在这些研究中曾指出：地转适应过程依赖于扰动水平尺度L，在较大尺度下（$L>L_0$，L_0为临界尺度）适应过程是风场向气压场调整；在较小尺度下（$L<L_0$）则气压场向风场调整。这里，我们从能量变化的角度再次证实这个结论。

首先，考虑正压大气的情况，此时有下列闭合方程组

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}+f\vec{K}\times\vec{V}=-\nabla\phi\\&\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\phi+C_g^2\nabla\cdot\vec{V}=0\end{aligned}\right.\tag{1}$$

式中$C_g^2=gH$，C_g为重力波波速，ϕ是位势高度，第二式可由不可压连续性方程直接导得。

利用尺度分析，考虑此方程组对地转适应问题的简化，令

$$t=\tau t' \qquad \nabla=L^{-1}\nabla' \qquad \vec{V}=V\vec{V}' \qquad \Delta\phi=\overline{\phi}\Delta\phi' \tag{2}$$

式中τ为特征时间，L为扰动的特征水平尺度，V为特征水平风速，$\overline{\phi}$为ϕ的水平改变量的特征尺度。把（2）代入方程组（1）就得到

*本院气象系77届大气专业学生

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\frac{1}{\tau_a}\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}+\frac{1}{\tau_i}\vec{K}\times\vec{V}=-\frac{\bar{\phi}}{LV}\nabla\phi \\
&\frac{1}{\tau}\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{\tau_a}\vec{V}\cdot\nabla\phi+\frac{C_g^2 V}{\bar{\phi}L}\nabla\cdot\vec{V}=0
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

式中已略去了撇号，并且

$$
\frac{1}{\tau_a}=\frac{V}{L} \qquad \frac{1}{\tau_i}=f
$$

这里 f 视为常数*。若用地转关系式估计 $\bar{\phi}$，那么

$$
\bar{\phi}\sim LVf
$$

（当 $L>L_c$　$L_c=\sqrt{\frac{V}{\beta}}$ 时，这是合理的）所以就有

$$
\frac{\bar{\phi}}{LV}=\frac{1}{\tau_i} \qquad \frac{C_g^2 V}{L\bar{\phi}}=\frac{C_g^2}{L^2 f}=\left(\frac{L_0}{L}\right)^2\frac{1}{\tau_i} \tag{4}
$$

式中 $L_0=\frac{C_g}{f}$ 为罗斯贝变形半径。

适应过程是一个快变过程，其特征时间为

$$
\tau\sim\tau_i
$$

而对我们所考虑的地转适应过程，显然

$$
\tau\sim\tau_i \ll \tau_a \qquad 即 \qquad \frac{\tau_i}{\tau_a}\ll 1
$$

这也就是说在地转适应过程中，作为一级近似可以略去平流项，由此可以得到下式

---

*在这里取 f 为常数是合理的，因为

$$
f=f_0\left(1+\frac{\beta}{f_0}Ly\right)=f_0\left(1+\frac{L}{L_s}y\right)
$$

y 为无量纲的量级为 1 的变量，　$\frac{f_0}{\beta}=L_s\sim10^7m$，所以在 $L\leqslant L_s$ 的情况下可以视为常数。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{K} \times \vec{V} = -\nabla \phi \\
\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \qquad \xi = \left(\dfrac{L_0}{L}\right)^2 t
\end{cases} \tag{5}
$$

式中各量均是无量纲的。这里引入扩张变量 ξ 是为了能在方程中各项变化量级相当的时段内考虑问题。

现在令

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \\ \Phi(\xi) \end{pmatrix} e^{i(K_1 x + K_2 y)}
$$

把此代入(5)式得

$$
\begin{cases}
\dfrac{dU}{dt} - V = -iK_1 \Phi \\
\dfrac{dV}{dt} + U = -iK_2 \Phi \\
\dfrac{d\Phi}{d\xi} = -i(K_1 U + K_2 V)
\end{cases} \tag{6}
$$

对此方程组稍加运算，可得

$$
\frac{d}{dt}(U^2 + V^2) = \left(\frac{L}{L_0}\right)^2 \frac{d}{dt}\Phi^2 \tag{7}
$$

显然，$\dfrac{d}{dt}(U^2 + V^2)$是运动动能变化率的一种量度；而 $\dfrac{d}{dt}\Phi^2$ 可以看作位能变化率的一种量度。这两种能量变化率的相对大小显然与运动场即风场和质量场即气压场随时间的变异程度直接相关。由此，我们可以直接得出如下的结论：

1. 当$\dfrac{L}{L_0}<1$ 时，那么$\left(\dfrac{L}{L_0}\right)^2$就更小于 1，由(7)式可见，在此适应过程中，相应的位能变化率比动能变化率要大得多。这就是说位势场或气压场的变化比流场的变化大得多，因此气压场向风场适应。

2. 当 $\dfrac{L_0}{L}<1$ 时，$\left(\dfrac{L_0}{L}\right)^2$就更小于 1，同样从(7)式可知，在此适应过程中，动能变化率远大于位能的变化率，因而风场向气压场适应。

3. $L=L_0$时，两种能量的变化率相当，亦即风场和气压场的变异程度相当，所以是互相适应。

这些结论与从其它角度推出的结论是一致的。当然，我们也可以求解（6）式来进一步说明适应过程的机制是重力惯性波频散能量。下面对此稍作说明。

（6）式可改写成

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} U \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & iK_1 \\ 1 & 0 & iK_2 \\ iK_1S & iK_2S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \\ \Phi \end{pmatrix} \quad S=\left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \tag{8}$$

系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & iK_1 \\ 1 & -\lambda & iK_2 \\ iK_1S & iK_2S & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

由此解得

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{1+S(K_1^2+K_2^2)}$$

实际上$\sqrt{1+S(K_1^2+K_2^2)}$正是一种频率（无量纲），并且就是重力惯性波的频率。这样就清楚地看出是这种重力惯性波频散能量，而使运动趋于地转平衡。

上面针对正压大气的地转适应问题作了讨论，这种方法可以直接推广到斜压大气的情形。当然，前面给出的对正压大气的讨论可以作为下面将要讨论的斜压大气情形的一个特例。

通过尺度分析，可得到描述斜压大气适应问题的方程组[1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - fv = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + fu = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p} + C_0^2\dfrac{\omega}{p^2} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

式中$C_0^2=\dfrac{R}{g}(\gamma_d-\gamma)R\overline{T}$，$\gamma_d$为干绝热温度垂直递减率，$\gamma$为温度垂直递减率。

这里为方便起见视C_0^2为常数，ϕ是位势的扰动量。把(10)式无量纲化，令

$$
\begin{aligned}
&t = \tau t' \qquad \vec{V} = V\vec{V}' \qquad \nabla = L^{-1}\nabla' \\
&\omega = \overline{\omega}\,\omega' \qquad p = \pi p' \qquad \phi = \overline{\phi}\phi'
\end{aligned} \tag{11}
$$

τ、V、L的意义同前，$\overline{\omega}$，π，$\overline{\phi}$分别为相应量的特征量。同时，仍然有下列关系

$$
\tau = \frac{1}{f} \qquad \overline{\phi} = LVf \tag{12}
$$

再由(10)式第四个方程可得

$$
\overline{\omega} = \frac{V}{L}\pi \tag{13}
$$

把(11)、(12)、(13)式代入(10)式，得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{K}\times\vec{V} = -\nabla\phi \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial p}\right) + \dfrac{\omega}{p^2} = 0 \qquad \xi = t\left(\dfrac{L_0}{L}\right)^2 \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial\omega}{\partial p} = 0 \qquad L_0 = \dfrac{C_0}{f}
\end{cases} \tag{14}
$$

这里已略去了撇号。L_0的意义同前，但量值略有不同。

令

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\ (t,\ p) \\ V\ (t,\ p) \\ \Phi\ (\xi,\ p) \\ W\ (t,\ p) \end{pmatrix} e^{i(K_1x + K_2y)} \tag{15}
$$

把此式代入(14)式得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} - V = -iK_1\Phi \\[2ex]
\dfrac{\partial V}{\partial t} + U = -iK_2\Phi \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial p}\right) + \dfrac{W}{p_2} = 0 \\[2ex]
iK_1U + iK_2V + \dfrac{\partial W}{\partial p} = 0
\end{cases} \tag{16}
$$

对此方程组稍加运算，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(U^2+V^2)=\left(\frac{L}{L_0}\right)^2\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^2+\frac{\partial W\Phi}{\partial p} \tag{17}$$

因为上式最后一项不是关于时间的变化率，同时，$\frac{\partial}{\partial t}\left(p\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)^2$可以看作有效位能变化率的一种量度，所以比较两个时间导数项的相对大小，就可以象对(7)式一样地进行讨论，并且可得出相同的结论。所不同的是 L_0 有所不同，这里 L_0 与大气垂直结构有关。若考虑到高低空 C_0^2 的不同，就可以定性地得到关于高低空适应特征有所不同的结论。关于 C_0^2 在垂直方向有变化的情形可参见文献[2]。

上面从能量变化角度讨论了地转适应过程中适应特征与扰动水平尺度的关系。虽然，这里的讨论没有得到新结果，但作为对问题的深入了解，仍是有所裨益的。

本文承寿绍文老师帮助，作者谨致谢意。

参 考 文 献

[1] 叶笃正、李麦村，大气运动中的适应问题，科学出版社，1965。
[2] 曾庆存，数值天气予报的数学物理基础，科学出版社，1979，第一卷，222—229页。