

用三点法计算散度时的参数问题

林宗鸿*

三点法计算散度已较普遍。1980年第5期《气象》上文宝安作了系统的介绍，列出的公式为

$$D = \frac{V_A}{H_A} \cos(\alpha_A - \gamma_A) + \frac{V_B}{H_B} \cos(\alpha_B - \gamma_B) + \frac{V_C}{H_C} \cos(\alpha_C - \gamma_C) \quad (1)$$

式中 H_A , H_B , H_C 和三高的长度和方向角, V_A , V_B , V_C 和 α_A , α_B , α_C 为三点的风速和风向(见图1)。

对于一固定的三角形, H_A , H_B , H_C 和 γ_A , γ_B , γ_C 这六个参数是不变的。上文还列出了92个三角形的参数表, 为使用者提供了方便。但有同志发现, 当三点的风向风速完全一致时, 运用这些参数, 代入(1)式, 却算出了 $D \neq 0$, $|D|$ 一般为 10^{-7} /秒级(少数如68号、72号等三角形还要大一量级, 那是因参数计算差错造成的, 不加讨论)。众所周知, 在略去球面性之后, 均匀风场中的散度应得为零(涡度也同样)。这在正方形法中, 用公式 $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 由于 u 、

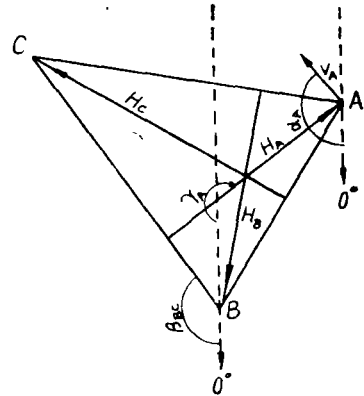


图 1

v 处处一样, $D=0$ 是很明显的。那么, 是否三点法就有毛病呢? 或者不如正方形法精确呢? 不是的。下面就来证明, 三点法的(1)式, 同样能得到“匀场散度”必等于零的结果。

首先应认识到, (1)式中六个参数不是完全独立的, 它们只有四个自由度, 有个内在的“匹配”问题。平面几何学可证明, 一个三角形的三高长度(H_A , H_B , H_C)确定后, 其形状就确定了; 又只要其中一条高的方向(如 γ_A)确定后, 其它二高的方向(γ_B , γ_C)也随之确定。下面就来推导 H_A , H_B , H_C , γ_A 四参数和 γ_B , γ_C 二参数之间应该满足的关系式。

由图1

$$\gamma_B = \gamma_A - C \pm 180^\circ \quad (2)$$

$$\gamma_C = \gamma_A + B \pm 180^\circ \quad (3)$$

*合肥, 安徽省气象科学研究所

由余弦定理

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (4)$$

又 $aH_A = bH_B = cH_C = 2S$ (S 为 $\triangle$ 面积)

代入(4)式整理可得

$$\cos B = \frac{1}{2} \left(\frac{H_A}{H_C} + \frac{H_C}{H_A} - \frac{H_A H_C}{H_B^2} \right) \quad (5)$$

同理

$$\cos C = \frac{1}{2} \left(\frac{H_A}{H_B} + \frac{H_B}{H_A} - \frac{H_A H_B}{H_C^2} \right) \quad (6)$$

把(5)、(6)代入(3)、(2)得

$$\gamma_B = \gamma_A - \arccos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H_A}{H_B} + \frac{H_B}{H_A} - \frac{H_A H_B}{H_C^2} \right) \right] \pm 180^\circ \quad (7)$$

$$\gamma_C = \gamma_A + \arccos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{H_A}{H_C} + \frac{H_C}{H_A} - \frac{H_A H_C}{H_B^2} \right) \right] \pm 180^\circ \quad (8)$$

(7)、(8)式就是六参数应该满足的内在匹配关系。

下面再来证明, 只要六参数符合以上匹配关系, 则在均匀风场里, 即 $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha$, $V_A = V_B = V_C = V$ 时, 必有(1)式 $D=0$, 此时(1)式为

$$D = V \left[\frac{1}{H_A} \cos(\alpha - \gamma_A) + \frac{1}{H_B} \cos(\alpha - \gamma_B) + \frac{1}{H_C} \cos(\alpha - \gamma_C) \right]$$

将(2)、(3)代入上式得

$$D = V \left[\frac{1}{H_A} \cos(\alpha - \gamma_A) - \frac{1}{H_B} \cos(\alpha - \gamma_A + C) - \frac{1}{H_C} \cos(\alpha - \gamma_A - B) \right]$$

令 $\alpha - \gamma_A = \beta$, 上式又改写为

$$\begin{aligned} D &= V \left[\frac{1}{H_A} \cos \beta - \frac{1}{H_B} \cos(\beta + C) - \frac{1}{H_C} \cos(\beta - B) \right] \\ &= V \left[\frac{1}{H_A} \cos \beta - \frac{1}{H_B} \cos \beta \cos C - \sin \beta \sin C - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{H_C} (\cos \beta \cos B + \sin \beta \sin B) \right] \\ &= V \cos \beta \left(\frac{1}{H_A} - \frac{\cos C}{H_B} - \frac{\sin B}{H_C} \right) + V \sin \beta \left(\frac{\sin C}{H_B} - \frac{\sin B}{H_C} \right) \end{aligned}$$

上式右端第一项的括号中可用(5)、(6)代入,得

$$\left(\frac{1}{H_A} - \frac{\cos C}{H_B} - \frac{\cos B}{H_C} \right) = \frac{1}{H_A} - \frac{1}{2H_B} \left(\frac{H_A}{H_B} + \frac{H_B}{H_A} - \frac{H_A H_B}{H_C^2} \right) - \frac{1}{2H_C} \left(\frac{H_A}{H_C} + \frac{H_C}{H_A} - \frac{H_A H_C}{H_B^2} \right) = 0$$

第二项的括号中可用 $\frac{\sin B}{H_C} = \frac{1}{a} = \frac{\sin C}{H_B}$ 代入,得

$$\left(\frac{\sin C}{H_B} - \frac{\sin B}{H_C} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

于是就得 $D=0$, 也就是证明了只要三个站的风完全一致, 不论其风向是什么, 风速有多大, 三点法算得的散度(以下简称“匀散”)也必等于零。

然而, 以上是数学理论上的证明, 实际计算时, 要给出每个参数的具体值, 此时, 匹配就要受到精度的制约, 在保留有限位小数的情况下, 一般都不能达到完全的匹配, 而只能是近似的匹配。算出的“匀散”也不能绝对等于零, 而只能近似等于零。文氏表中的 $1/H$ 精确到 10^{-8} /米, γ 精确到度, 算得“匀散”为 10^{-7} /秒级, 这是很自然的。但这只是计算中的截断误差问题, 而不是三点法有什么固有弊病。

当然可以用提高参数精度的办法, 使得“匀散”更接近于零, 以提高散度的计算精度。作者曾经在计算机上算了文氏92个三角形的参数(方法在后面介绍), 若把 $1/H$ 取到 10^{-9} , γ 取到 0.1 度, 则“匀散”平均为 2×10^{-8} /秒。但是, 用实测风计算散度, 不论是三点法还是正方形法, 都还有测风误差等更重要的误差, 计算结果能有 10^{-6} /秒的精度也就够了, 追求更高的精度也没有意义。

还得阐明一点, 从“匀散”的大小, 只能判别参数的匹配程度, 而并不一定能反映参数的准确与否。“匀散”太大, 固然说明参数有差错(如文氏表中68号); 但“匀散”小, 还不能肯定参数必然准确, 很显然, 如果某站(甚至三站)的地理位置搞错了, 参数还是会匹配, “匀散”也能很小, 但这些参数却全错了(文氏表中阳江附近的81—83号就是这种情况, 可能是阳江的地理位置搞错了)。

最后再给出利用测站经纬度计算六参数的方法(见图2)。

先指定三站中经度处在中间的那个站为B站, 并把通过B站的经线认定为南北线。再按球面三角法算出三边(实为大圆弧)的长度, 其公式为

$$\widehat{BC} = \cos^{-1} [\cos \varphi_C \cos \varphi_B \cos(\lambda_C - \lambda_B) + \sin \varphi_C \sin \varphi_B] (\text{度})$$

$$a \doteq |\widehat{BC}| = 6371 \times \pi \times \widehat{BC} / 180^\circ (\text{公里})$$

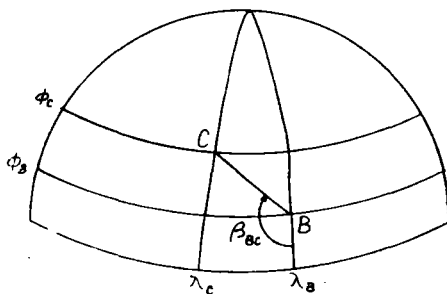


图 2

b, c 仿此求得。

再求出BC边的方向角 (β_{BC})，公式为

$$\beta_{BC} = \cos^{-1} \left[\frac{\cos \varphi_C \cos (\lambda_C - \lambda_B) - \cos \varphi_B \cos \widehat{BC}}{\sin \varphi_B \sin \widehat{BC}} \right]$$

有了这四个数之后，就按平面三角形处理， $H_A = \left[b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2 \right]^{1/2}$ ， H_B ， H_C 仿此； $\gamma_A = \beta_{BC} + 90^\circ$ ， γ_B ， γ_C 则用 (7)、(8) 式求出，也可由 a、b、c 和 γ_A 不难求出。应当注意的是，不能用球面法再去求出第五、第六个参数，这样会引起“球面角超”问题，又会造成六参数的平面不匹配。

这个方法在袖珍计算器上也很容易算。气象台站的经纬度“台站表”上有。根据不同的需要，选站组排的三角形，都能这样算。