

# 飞机播撒催化剂的叠加效应

申亿铭 陈吉航

(北京气象专科学校)

在文章[1]中我们曾计算和讨论了一条线源的扩散规律和冰晶浓度分布,然而在实际的人工影响云和降水的作业中飞机并非只做一条线的播撒,而往往是在线源的下风方向的高度上以一定时间间隔进行若干条线的催化剂作业(见图1)。这样就构成了数条线源催化剂的扩散问题。显然,其扩散规律和催化剂质点的空间分布要比一条线源时为复杂。在这种情况下人们所要了解的是数条线源对下风方影响区共同作用的结果,换句话说,就是要知道影响区催化剂的叠加浓度或叠加效应。为此,我们假定了在图1的作业条件下就若干条线源的扩散和催化剂的叠加浓度进行计算和分析。

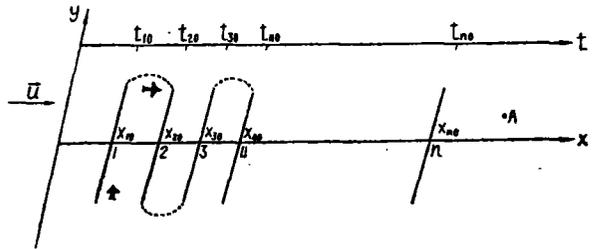


图1 飞机播撒催化剂作业示意图

图中x和y为水平坐标; t为时间坐标; u为与x轴平行而与y轴相垂直的水平风速分量; 1, 2, 3, 4, ……n为线源的标号;  $t_{10}, t_{20}, t_{30}, t_{40}, \dots, t_{n0}$ 为各条线源对应的初始时刻,它是相对飞机播撒催化剂的时间而言的; 而  $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, \dots, x_{n0}$ 为各条线源对应的初始坐标。

从图1上不难看出, 每条线源都构成了一条独立的线源, 它们的扩散互不依赖互不干扰。

我们已经知道, 在一般情况下自由大气中的扩散方程具有如下形式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} \quad (1)$$

式中q为扩散物质浓度, u, v和w分别代表x, y和z轴上的风速分量,  $K_x, K_y$ 和 $K_z$ 分别为x, y和z轴上的湍流系数, t为时间。

在层状云中一般水平风速具有若干米/秒的量级, 而上升速度只有若干厘米/秒或十

分之几厘米/秒大小，故后者可以忽略；近似球形的催化剂质点当其尺度达到一定大小时都具有明显的下沉速度，因此，在计算中应予考虑；在作业时播撒线是与水平风向呈垂直，即飞机飞行路线与  $y$  轴平行，而与  $x$  轴垂直，同时催化剂的播撒是均匀的，这样  $v \frac{q}{\partial y}$  项就可以不考虑了；除此，还假定大气是各项同性的，故  $K_x = K_y = K_z = K$ 。通过上述简化，並考虑近似球形质点的下沉作用，则上式变为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} = K \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

就一般情况而言，催化剂质点在云中的扩散过程中有可能遇到云滴，且被后者捕获，无疑它会减少催化剂质点，这种因素也应予以考虑，故在方程(2)中应补充捕获效应项，于是层状云中完整的扩散方程应为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} = K \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) - \alpha N_c q \quad (3)$$

式中  $\alpha$  为云滴的捕获系数， $N_c$  为云滴浓度。

求解方程(3)给定如下的初始和边界条件：

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \text{ 时, } \quad q = Q \delta(x) \delta(y) \cdot \delta(z - H) \\ z = 0 \text{ 时, } \quad q = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty \text{ 时, } \quad q = 0 \end{array} \right\} \quad (3')$$

式中  $Q$  为点源单位时间的核生成率； $\delta(x)$ 、 $\delta(y)$  和  $\delta(z-H)$  为  $\delta$  函数； $H$  为源高，即飞机的播撒高度。

如果忽略云滴对冰晶的捕获效应，利用初始和边界条件(3')再经若干变换和积分，即可求得方程(2)无限线源的下述解(详见文献[1])

$$q = \frac{Q'}{4\pi K t} e^{-\frac{w^2 t}{4K} - \frac{w(z-H)}{2K} - \frac{(x-ut)^2}{4Kt}} \times \left[ e^{-\frac{(z-H)^2}{4Kt}} - e^{-\frac{(z+H)^2}{4Kt}} \right] \quad (4)$$

这里  $q$  表示任一时刻任一空间点的催化剂浓度，其单位为个/升；而  $Q'$  为单位线源的核生成率，以克/厘米表示。

如将(4)式变为对任意线源都适用的普适公式，则可写成如下形式

$$q_n = \frac{Q}{4\pi K t_n} e^{-\frac{w^2 t_n}{4K} - \frac{w(z-H)}{2K} - \frac{(x_n - ut_n)^2}{4K t_n}} \times \left[ e^{-\frac{(x-H)^2}{4K t}} - e^{-\frac{(x+H)^2}{4K t}} \right] \quad (5)$$

式中 $x_n$ 为空间任一点距第 $n$ 条线源初始坐标的水平距离, 而 $t_n$ 为该条线源的扩散时间。由于各条线源间的播撒时间间隔是相等的, 故应有

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \cdots \cdots = t_n - t_{n-1} = \Delta t = \text{常数}$$

为了计算方便, 我们确定以第一条线源的扩散时间为准, 依次后延, 则任意线源的扩散时间可按下式来推算

$$t_{n+1} = t_1 + n \Delta t \quad n=0, 1, 2, 3, \cdots \quad (6)$$

如令 $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ 分别代表第一至第 $n$ 条线源的催化剂的扩散浓度, 则可看出, 图1中A点所接收到的催化剂浓度应该是各条线源扩散物质的总合。因此影响区任一空间地点、不同时间的催化剂的叠加浓度 $q_c$ 应为

$$q_c = q_1(t_1, x_1, z) + q_2(t_2, x_2, z) + \cdots + q_n(t_n, x_n, z) = \sum_1^n (t_n, x_n, z) \quad (7)$$

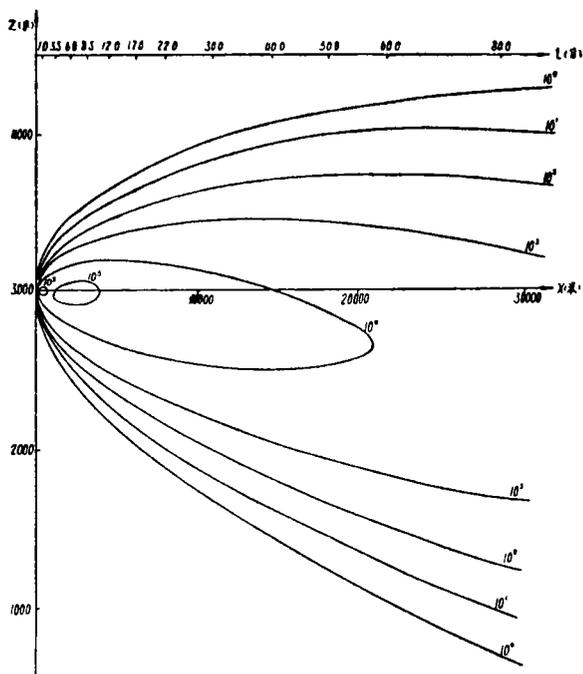


图 2

利用(5)、(6)和(7)式就可计算若干条线源在下风方的扩散规律和催化剂叠加浓度的空间分布了。

为了便于与一条线源(本文确定为第一条线源)的扩散规律和扩散浓度进行比较, 我们仍使用1963年3月8日河北廊坊地区试验的原始数据\*, 即 $t = -14^\circ\text{C}$ 、 $P = 700\text{mb}$ 、 $R_d$ (冰晶半径) = 15和25微米、 $R_c$ (云滴半径) = 0.00075毫米及 $u = 6$ 米/秒。并根据这些数据计算了 $w = 10$ 厘米/秒的扩散情况。除此, 依然给定 $K = 20$ 和 $40\text{米}^2/\text{秒}$ 两个数据。在这一天的催化作业中共进行了四条线的播撒, 也就是说形成了四条线源, 其时间间隔为

\*中央气象局研究所编, 人工降水、防雹基础知识, 1974年

2.5分钟。

使用上述数据计算的结果分别绘制了图2—图5，同时将选取的有关数据列于表1。

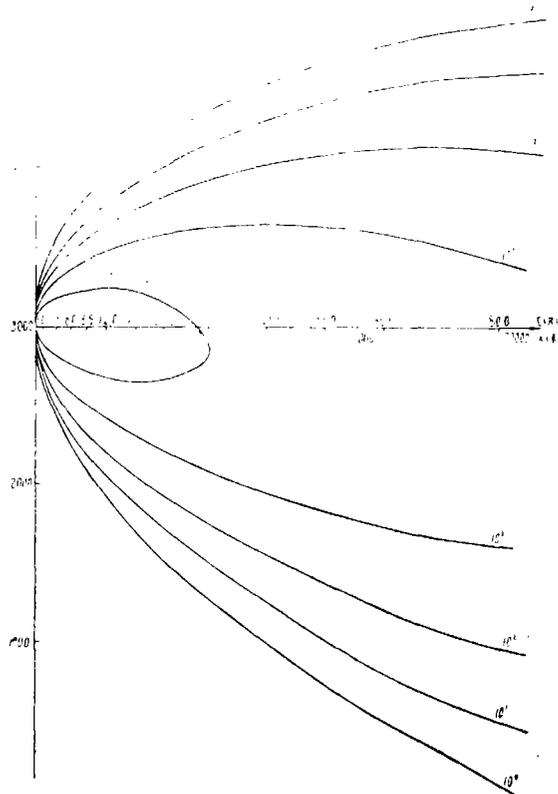


图 3

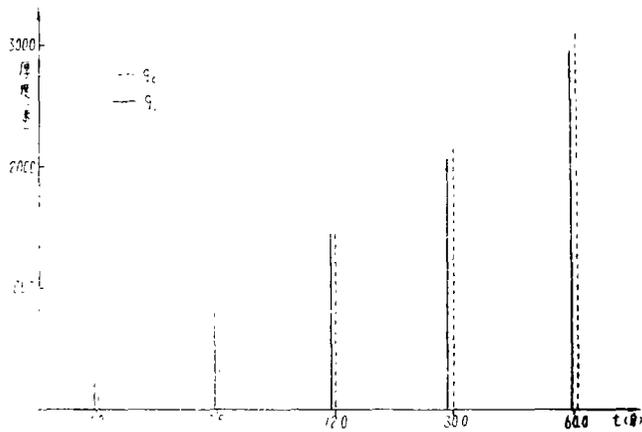


图 4

从图2、图3两张图上可以清楚地看出下面的若干规律：第一，离线源愈近，催化剂的浓度愈大，其浓度梯度也愈大，但扩散厚度却较小。相反，离线源愈远，催化剂的浓

度愈小，其浓度梯度也愈小，但扩散厚度却较大；第二，由于催化剂质点受下沉作用的影响产生了空间浓度相对播撒高度面的非对称性，且向下倾斜。无疑下沉速度愈大，其向下的倾斜度也愈大。在所计算的时段内仅显示出催化剂浓度的两条闭合等值线，但从理论上讲各条催化剂浓度等值线都应该是闭合的；第三，湍流系数愈大，催化剂的扩散速度和扩散范围也愈大。

这些基本规律与一条线源的扩散规律是完全一致的。

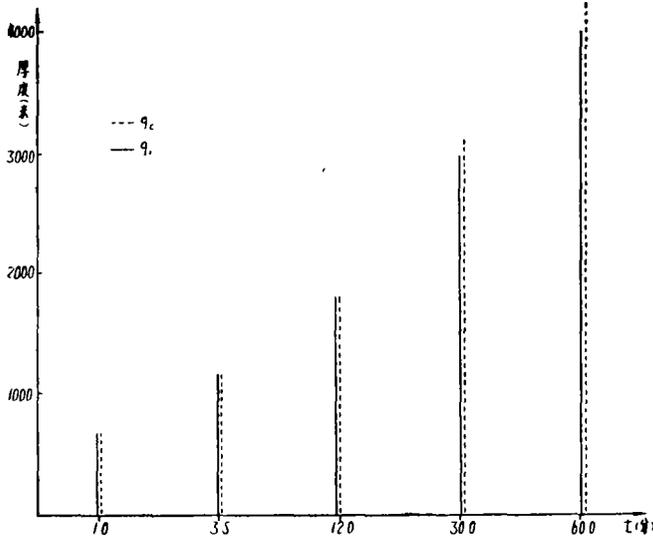


图 5

在图4和图5上我们绘制了一条线源和四条线源总体的催化剂的垂直扩散范围（仍以 $10^\circ$ 为界）。从图上可以看到，在12分钟以前两者完全一致，到30分钟时两者稍有差别，及至到60分钟时才出现100—200米的差距。无疑随着时间的增加，两者之间的差距还会逐渐增大。分析其原因，主要是前面所提到的各条线源都是作为独立线源存在的，它们本身的扩散只取决于催化剂质点粒度的大小、湍流系数和环境条件。当这些都是一样时，显然在一定时段内总是第一条线源的扩散范围大于其它线源的扩散范围。在这段时间内第一条线源的扩散范围与四条线源总体的扩散范围无疑是一致的。及至第一条线源的扩散范围在峰值以后日趋变小而其它线源的范围仍依次继续扩大时，就会出现两者之间的差异，而且总是四条线源总体的扩散范围大于第一条线源的扩散范围，并且时间愈长，差异愈大。

分析表1中的计算数据可以看到，在同一时间同一高度上催化剂的叠加浓度总是大于第一条线源的浓度，而且愈近源高差异愈大，例如在8.5分钟 $K=20$ 米<sup>2</sup>/秒时，3050米高度上的第一条线源的浓度值为 $1.21 \times 10^4$ 个/升，而叠加浓度值却为 $1.25 \times 10^5$ 个/升，两者相差一个量级，及至到3500米的高度上则前者为 $9.15 \times 10^0$ 个/升，而后者则为 $1.02 \times 10^1$ 个/升，显然两者已经相差不多。除此，从浓度梯度来看，也是叠加浓度的梯度大于非叠加浓度的梯度。

表 1 同一时间同一K值同一高度上的 $q_1$ 和 $q_c$ 对比数值表

t	8.5				30			
K	20		40		20		40	
z	$q_1$	$q_c$	$q_1$	$q_c$	$q_1$	$q_c$	$q_1$	$q_c$
4400								
4350								$1.39 \cdot 10^0$
4300							$1.1 \cdot 10^0$	$2.44 \cdot 10^0$
4250							$1.82 \cdot 10^0$	$4.21 \cdot 10^0$
4200							$2.95 \cdot 10^0$	$7.15 \cdot 10^0$
4150							$4.75 \cdot 10^0$	$1.19 \cdot 10^1$
4100							$7.48 \cdot 10^0$	$1.96 \cdot 10^1$
4050							$1.15 \cdot 10^1$	$3.15 \cdot 10^1$
4000							$1.75 \cdot 10^1$	$4.99 \cdot 10^1$
3950						$1.34 \cdot 10^0$	$2.62 \cdot 10^1$	$7.77 \cdot 10^1$
3900					$1.24 \cdot 10^0$	$3.06 \cdot 10^0$	$3.85 \cdot 10^1$	$1.19 \cdot 10^2$
3850					$2.79 \cdot 10^0$	$6.77 \cdot 10^0$	$5.55 \cdot 10^1$	$1.78 \cdot 10^2$
3800			$1.09 \cdot 10^0$	$1.15 \cdot 10^0$	$5.6 \cdot 10^0$	$1.44 \cdot 10^1$	$7.87 \cdot 10^1$	$2.63 \cdot 10^2$
3750			$3.0 \cdot 10^0$	$3.24 \cdot 10^0$	$1.09 \cdot 10^1$	$2.97 \cdot 10^1$	$1.09 \cdot 10^2$	$3.8 \cdot 10^2$
3700			$7.77 \cdot 10^0$	$8.68 \cdot 10^0$	$2.04 \cdot 10^1$	$5.92 \cdot 10^1$	$1.5 \cdot 10^2$	$5.39 \cdot 10^2$
3650			$1.89 \cdot 10^1$	$2.21 \cdot 10^1$	$3.69 \cdot 10^1$	$1.14 \cdot 10^2$	$2.02 \cdot 10^2$	$7.51 \cdot 10^2$
3600			$4.33 \cdot 10^1$	$5.34 \cdot 10^1$	$6.46 \cdot 10^1$	$2.1 \cdot 10^2$	$2.67 \cdot 10^2$	$1.03 \cdot 10^3$
3550	$2.33 \cdot 10^0$	$2.38 \cdot 10^0$	$9.33 \cdot 10^1$	$1.23 \cdot 10^2$	$1.09 \cdot 10^2$	$3.75 \cdot 10^2$	$3.47 \cdot 10^2$	$1.37 \cdot 10^3$
3500	$9.15 \cdot 10^0$	$1.02 \cdot 10^1$	$1.89 \cdot 10^2$	$2.7 \cdot 10^2$	$1.98 \cdot 10^2$	$6.45 \cdot 10^2$	$4.44 \cdot 10^2$	$1.81 \cdot 10^3$
3450	$3.32 \cdot 10^1$	$3.49 \cdot 10^1$	$3.6 \cdot 10^2$	$5.68 \cdot 10^2$	$2.8 \cdot 10^2$	$1.07 \cdot 10^3$	$5.57 \cdot 10^2$	$2.33 \cdot 10^3$
3400	$1.07 \cdot 10^2$	$1.38 \cdot 10^2$	$6.54 \cdot 10^2$	$1.15 \cdot 10^3$	$4.27 \cdot 10^2$	$1.7 \cdot 10^3$	$6.87 \cdot 10^2$	$2.94 \cdot 10^3$
3350	$3.0 \cdot 10^2$	$4.36 \cdot 10^2$	$1.09 \cdot 10^3$	$2.33 \cdot 10^3$	$6.28 \cdot 10^2$	$2.6 \cdot 10^3$	$8.33 \cdot 10^2$	$3.64 \cdot 10^3$
3300	$7.61 \cdot 10^2$	$1.28 \cdot 10^3$	$1.72 \cdot 10^3$	$4.17 \cdot 10^3$	$8.92 \cdot 10^2$	$3.82 \cdot 10^3$	$9.93 \cdot 10^2$	$4.42 \cdot 10^3$
3250	$1.69 \cdot 10^3$	$3.46 \cdot 10^3$	$2.57 \cdot 10^3$	$7.44 \cdot 10^3$	$1.22 \cdot 10^3$	$5.42 \cdot 10^3$	$1.16 \cdot 10^3$	$5.26 \cdot 10^3$
3200	$3.33 \cdot 10^3$	$8.61 \cdot 10^3$	$3.6 \cdot 10^3$	$1.33 \cdot 10^4$	$1.62 \cdot 10^3$	$7.37 \cdot 10^3$	$1.34 \cdot 10^3$	$6.14 \cdot 10^3$
3150	$5.99 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^4$	$5.75 \cdot 10^3$	$2.4 \cdot 10^4$	$2.07 \cdot 10^3$	$9.63 \cdot 10^3$	$1.51 \cdot 10^3$	$7.02 \cdot 10^3$
3100	$8.92 \cdot 10^3$	$4.91 \cdot 10^4$	$5.9 \cdot 10^3$	$4.67 \cdot 10^4$	$2.56 \cdot 10^3$	$1.21 \cdot 10^4$	$1.68 \cdot 10^3$	$7.86 \cdot 10^3$
3050	$1.21 \cdot 10^4$	$1.25 \cdot 10^5$	$6.88 \cdot 10^3$	$8.07 \cdot 10^4$	$3.01 \cdot 10^3$	$1.45 \cdot 10^4$	$1.84 \cdot 10^3$	$8.62 \cdot 10^3$
3000	$1.46 \cdot 10^4$	$2.05 \cdot 10^5$	$7.55 \cdot 10^3$	$1.03 \cdot 10^5$	$3.45 \cdot 10^3$	$1.68 \cdot 10^4$	$1.97 \cdot 10^3$	$9.27 \cdot 10^3$
2950	$1.56 \cdot 10^4$	$1.62 \cdot 10^5$	$7.8 \cdot 10^3$	$9.15 \cdot 10^4$	$3.93 \cdot 10^3$	$1.87 \cdot 10^4$	$2.08 \cdot 10^3$	$9.77 \cdot 10^3$
2900	$1.47 \cdot 10^4$	$8.11 \cdot 10^4$	$7.57 \cdot 10^3$	$6.0 \cdot 10^4$	$4.22 \cdot 10^3$	$1.99 \cdot 10^4$	$2.16 \cdot 10^3$	$1.01 \cdot 10^4$
2850	$1.23 \cdot 10^4$	$4.22 \cdot 10^4$	$7.12 \cdot 10^3$	$3.49 \cdot 10^4$	$4.39 \cdot 10^3$	$2.04 \cdot 10^4$	$2.2 \cdot 10^3$	$1.02 \cdot 10^4$

(续表 1)

t	8.5				30			
	20		40		20		40	
	z	q <sub>1</sub>	q <sub>c</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>c</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>c</sub>	q <sub>1</sub>
2800	9.01·10 <sup>3</sup>	2.34·10 <sup>4</sup>	5.94·10 <sup>3</sup>	2.15·10 <sup>4</sup>	4.41·10 <sup>3</sup>	2.01·10 <sup>4</sup>	2.21·10 <sup>3</sup>	1.01·10 <sup>4</sup>
2750	5.91·10 <sup>3</sup>	1.29·10 <sup>4</sup>	4.8·10 <sup>3</sup>	1.39·10 <sup>4</sup>	4.27·10 <sup>3</sup>	1.89·10 <sup>4</sup>	2.17·10 <sup>3</sup>	9.83·10 <sup>3</sup>
2700	3.41·10 <sup>3</sup>	5.75·10 <sup>3</sup>	3.6·10 <sup>3</sup>	8.82·10 <sup>3</sup>	4.0·10 <sup>3</sup>	1.72·10 <sup>4</sup>	2.1·10 <sup>3</sup>	9.37·10 <sup>3</sup>
2650	1.74·10 <sup>3</sup>	2.52·10 <sup>3</sup>	2.6·10 <sup>3</sup>	5.36·10 <sup>3</sup>	3.61·10 <sup>3</sup>	1.49·10 <sup>4</sup>	1.99·10 <sup>3</sup>	8.74·10 <sup>3</sup>
2600	7.88·10 <sup>2</sup>	1.02·10 <sup>3</sup>	1.75·10 <sup>3</sup>	3.12·10 <sup>3</sup>	3.1·10 <sup>3</sup>	1.25·10 <sup>4</sup>	1.87·10 <sup>3</sup>	7.99·10 <sup>3</sup>
2550	3.15·10 <sup>2</sup>	3.73·10 <sup>2</sup>	1.11·10 <sup>3</sup>	1.75·10 <sup>3</sup>	2.66·10 <sup>3</sup>	1.01·10 <sup>4</sup>	1.71·10 <sup>3</sup>	7.17·10 <sup>3</sup>
2500	1.15·10 <sup>2</sup>	1.24·10 <sup>2</sup>	6.59·10 <sup>2</sup>	9.43·10 <sup>2</sup>	2.17·10 <sup>3</sup>	7.86·10 <sup>3</sup>	1.51·10 <sup>3</sup>	6.31·10 <sup>3</sup>
2450	3.49·10 <sup>1</sup>	3.72·10 <sup>1</sup>	3.69·10 <sup>2</sup>	4.86·10 <sup>2</sup>	1.71·10 <sup>3</sup>	5.87·10 <sup>3</sup>	1.37·10 <sup>3</sup>	5.44·10 <sup>3</sup>
2400	9.24·10 <sup>0</sup>	1.0·10 <sup>1</sup>	1.94·10 <sup>2</sup>	2.39·10 <sup>2</sup>	1.29·10 <sup>3</sup>	4.23·10 <sup>3</sup>	1.19·10 <sup>3</sup>	4.59·10 <sup>3</sup>
2350	2.36·10 <sup>0</sup>	2.41·10 <sup>0</sup>	9.6·10 <sup>1</sup>	1.12·10 <sup>2</sup>	9.53·10 <sup>2</sup>	2.93·10 <sup>3</sup>	1.03·10 <sup>3</sup>	3.81·10 <sup>3</sup>
2300			4.47·10 <sup>1</sup>	4.99·10 <sup>1</sup>	6.76·10 <sup>2</sup>	1.96·10 <sup>3</sup>	8.64·10 <sup>2</sup>	3.1·10 <sup>3</sup>
2250			1.95·10 <sup>1</sup>	2.11·10 <sup>1</sup>	4.63·10 <sup>2</sup>	1.26·10 <sup>3</sup>	7.15·10 <sup>2</sup>	2.48·10 <sup>3</sup>
2200			8.0·10 <sup>0</sup>	8.5·10 <sup>0</sup>	3.06·10 <sup>2</sup>	7.89·10 <sup>2</sup>	5.81·10 <sup>2</sup>	1.94·10 <sup>3</sup>
2150			3.1·10 <sup>0</sup>	3.23·10 <sup>0</sup>	1.95·10 <sup>2</sup>	4.75·10 <sup>2</sup>	4.65·10 <sup>2</sup>	1.49·10 <sup>3</sup>
2100			1.13·10 <sup>0</sup>	1.16·10 <sup>0</sup>	1.21·10 <sup>2</sup>	2.76·10 <sup>2</sup>	3.65·10 <sup>2</sup>	1.13·10 <sup>3</sup>
2050					7.2·10 <sup>1</sup>	1.55·10 <sup>2</sup>	2.82·10 <sup>2</sup>	8.36·10 <sup>2</sup>
2000					4.14·10 <sup>1</sup>	8.46·10 <sup>1</sup>	2.14·10 <sup>2</sup>	6.09·10 <sup>2</sup>
1950					2.3·10 <sup>1</sup>	4.45·10 <sup>1</sup>	1.59·10 <sup>2</sup>	4.35·10 <sup>2</sup>
1900					1.24·10 <sup>1</sup>	2.27·10 <sup>1</sup>	1.17·10 <sup>2</sup>	3.06·10 <sup>2</sup>
1850					6.42·10 <sup>0</sup>	1.12·10 <sup>1</sup>	8.43·10 <sup>1</sup>	2.11·10 <sup>2</sup>
1800					3.22·10 <sup>0</sup>	5.36·10 <sup>0</sup>	5.96·10 <sup>1</sup>	1.43·10 <sup>2</sup>
1750					1.58·10 <sup>0</sup>	2.48·10 <sup>0</sup>	4.15·10 <sup>1</sup>	9.58·10 <sup>1</sup>
1700						1.11·10 <sup>0</sup>	2.83·10 <sup>1</sup>	6.29·10 <sup>1</sup>
1650							1.91·10 <sup>1</sup>	4.06·10 <sup>1</sup>
1600							1.26·10 <sup>1</sup>	2.57·10 <sup>1</sup>
1550							8.17·10 <sup>0</sup>	1.61·10 <sup>1</sup>
1500							5.21·10 <sup>0</sup>	9.89·10 <sup>0</sup>
1450							3.27·10 <sup>0</sup>	5.98·10 <sup>0</sup>
1400							2.01·10 <sup>0</sup>	3.56·10 <sup>0</sup>
1350							1.22·10 <sup>0</sup>	2.08·10 <sup>0</sup>
1300								1.21·10 <sup>0</sup>

注：表中 t (单位：分)，K (单位：米<sup>2</sup>/秒)，z (单位：米)，q<sub>1</sub>、q<sub>c</sub> (单位：个/升)

从上述分析可以得到下面几点结论:

1. 若干条线源总体的扩散规律和一条线源的扩散规律基本一致。
2. 在一定时段内若干条线源总体的扩散范围和第一条线源的扩散范围之间没有多大差异, 但超过此时段后, 若干条线源总体的扩散范围总是大于第一条线源的扩散范围, 而且时间愈长差异愈大。
3. 就催化剂浓度随高度的分布而言, 在同一时刻同一高度上总是 $q_c$ 大于 $q_1$ , 且 $q_c$ 的梯度也大于 $q_1$ 的梯度。
4. 就水平扩散范围而言, 多条线源的扩散范围永远大于第一条线源的扩散范围, 而且线源愈多, 扩散范围也愈大。

### 参 考 文 献

- [1] 申亿铭, 过冷层云和层积云中飞机播撒催化剂的扩散问题, 气象科技集刊(2), 中央气象局气象科学研究所编, 1982。