第13卷 第2期
1990年6月

南京气象学院学报
Journal of Nanjing Institute of Meteorology

Vol.13, No.2
Jun., 1990

大气运动不稳定的变分原理

曾 庆 存

（中国科学院大气物理研究所大气科学
和地球流体力学数值模拟开放研究实验室）

提 要

本文利用非线性基本方程组和变分原理研究旋转大气运动的不稳定性问题。文中所用方法是普遍适用的，对各种可能的基流模型都可获得其不稳定性判据。例如：适合于正压或斜压、分层或连续模型以及准地转模式或原始方程组；基流可以是带状或非带状的（即平行流或非平行流）、定常的或非定常的。虽然基流具有多样性，但它们在由相应的不变泛函所决定的空间内都是驻点（临界点）。如果在相应的泛函中将角动量守恒包括进去，那么基流可以是非定常流。无论线性或非线性二阶变分都给出不稳定性判据。但尤其值得一提的是，本文第一次得到关于非定常基流、地形扰动流和非地转流的不稳定性判据。同时本文也指出了线性理论和我们发展的变分原理所得到的不稳定性判据之间的差别，该差别说明用非线性基本方程组的重要性。在最后一节，将该理论推广到流体不具有有限能量，因而变分原理不能直接应用的情况，如β-平面，然而广义的Liapounoff函数仍然可以在变分考虑下得到。

一、引 言

大气运动的不稳定性问题是一般的流体力学不稳定性问题的一个组成部分，是一个经典的、然而困难的问题。研究该问题的一个比较完善的方法是求解相应的线性方程或方程组的广义特征值问题。然而，此方法一般仅对带状（平行）和定态的基流是适合的（见Lin, 1955）。对非带状和定常基流情形，Arnold(1965)提出了一种非常有力的变分方法来求不稳定性判据。但迄今为止，文献中仅仅给出了二维无辐散模式的带状流或者常定曲线流的不稳定性判据（Arnold, 1955; Dikii, 1955），以及三维的但带有等熵下界面的地转模式的不稳定性判据（Blumen, 1968）。没有任何人用变分原理或线性方法对三维原始方程组求得普适的不稳定性判据。由于没有发展出普遍适用的方法，因而也未曾有人对任何大气模型中非定常基流给出过普适的不稳定性判据。

为了填补这个空白，我们在Arnold方法基础上发展了一种广义变分方法，这种方法对于求出各种大气模式的不稳定性判据是普遍适用的。即：模式可以是正压的或斜压的、准地转的或非地转的，且基流可以是带状的或非带状的、定常的或非定常的。注意到不稳定性的线性理论是针对线性化方程(或方程组)而言的，而变分原理是建立在非线性方程(或方程组)基础上的，因而由变分原理发展起来的理论是针对非线性情形，并且只要求Liapounoff意义下的稳定性概念能适用即可。该方法自然可用于研究小扰动的稳定性；另外，也可用于特殊情形下大振幅扰动的稳定性研究。

二、二维准地转模式的一般定理

在二维准地转模式(或二维不可压缩流体)的基本方程为位涡守恒方程（或涡度守恒方程）

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla q=0 \tag{2.1}$$

其中

$$q=\Delta\psi-\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\psi+2\omega\cos\theta \tag{2.2}$$

$$\vec{v}=\vec{\theta^0}\left(-\frac{\partial\psi}{a\sin\theta\partial\lambda}\right)+\vec{\lambda^0}\left(\frac{\partial\psi}{a\partial\theta}\right) \tag{2.3}$$

ψ是流函数，φ_0是等价的自由表面的平均重力位势，f_0是平均科氏参量，ω是地球角速度，∇和Δ分别表示在半径为a的球面上的梯度算子和拉普拉斯算子。$k=0$，1，$k=0$对应于二维无辐散模式。为简化起见，此处略去了地形作用。

从(2.1)可以得到能量、“广义位涡拟能”和角动量诸守恒律，因此，我们有如下不变泛函，它是依赖于任意函数Q和一些参量r_0、r_1、r_2的ψ的泛函

$$I(\psi)=\iint_S\left\{r_0\left[|\vec{v}|^2+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi^2}\psi^2\right]+r_1Q(q)+r_2\left[\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\kappa\frac{a^2f_0^2}{\varphi_0}\psi\cos\theta\right]\right\}dS=\text{常量} \tag{2.4}$$

其中积分遍及整个球面，泛函I即是Arnold-Dikii泛函的推广(后者相当于在(2.4)中令$r_2=0$)。后面，我们将看到这种推广的重要性。换言之，总角动量守恒扮演着特殊角色，虽然它是一阶泛函，不同于二阶或高阶的总能量和广义位涡拟能。

给出一个扰动$\delta\psi$，在做一些基本运算后得到一阶和二阶变分δI、$\delta^2 I$以及差$I(\psi+\delta\psi)-I(\psi)$如下

$$\delta I=\iint_S\left\{-2r_0\psi+r_1Q'(q)+r_2a^2\cos\theta\right\}\delta q dS \tag{2.5}$$

$$\delta^2 I=\iint_S\left\{r_0\left[\,|\delta\vec{v}|^2+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0^2}(\delta\psi)^2\,\right]+r_1\frac{1}{2}Q''(q)(\delta q)^2\right\}dS \tag{2.6}$$

$$I(\psi+\delta\psi)-I(\psi)=\delta I+\delta^2 I+\cdots\cdots \tag{2.7}$$

其中　$Q'(q)=\dfrac{dQ}{dq}$　，　$Q''=\dfrac{d^2Q}{dq^2}$　。此外，又有

$$I(\psi+\delta\psi)-I(\psi)=\delta I+\Delta^2 I \tag{2.8}$$

它是利用Taylor级数截断的Lagrange公式而得到的，其中

$$\Delta^2 I=\iint_S\left\{r_0\left[\,|\delta\vec{v}|^2+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0^2}(\delta\psi)^2\right]+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}dS \tag{2.9}$$

$$q^*=q+r^*\delta q\qquad 0\leqslant r^*\leqslant 1$$

式中$\Delta^2 I$不同于$\delta^2 I$，即$Q''(q)$由$Q''(q^*)$代替。假设我们研究的所有流动状态都有平方可积的位涡度，即：$\psi+\delta\psi\in W_2^2$（这相当于$\psi+\delta\psi\in L_2$，　$\vec{v}+\delta\vec{v}\in L_2$和$q+\delta q\in L_2$（参见曾庆存，1979）），并且 I 和$\Delta^2 I$均存在，则我们有如下定理：

定理2.1　方程(2.1)—(2.3)的每一个形如$\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$（相角速度为$\dot{\lambda}_0$的行波）的解是泛函空间$\psi$中 I 的驻点(stationary point)，即$\delta I=0$，而且相角速度为$\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$，逆定理亦成立。

证明：如果$\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$是(2.1)的解，我们有$\partial q/\partial t=-\dot{\lambda}_0\partial q/\partial\lambda=J(\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta,\ q)$此处$J(\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta,\ q)$代表半径为 a 的球面上的雅可比算子。这样从(2.1)就得到

$$J(\psi+\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta,q)=0 \tag{2.10}$$

这意味着$\psi+\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta$是 q 的任意函数

$$\psi+\dot{\lambda}_0 a^2\cos\theta=\widetilde{Q}(q) \tag{2.11}$$

令$r_1Q'(q)=\widetilde{Q}(q)$，即

$$r_1Q=\int_{q_0}^{q}\widetilde{Q}(x)\,dx \tag{2.12}$$

而$\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$，且$r_0\neq 0$，则从(2.1)可得

$$-2r_0\psi+r_1Q'(q)+r_2a^2\cos\theta=0 \tag{2.13}$$

因而$\delta I=0$成立，定理得证。

再证明逆定理，给定一个ψ，如果$\delta I=0$，则(2.13)满足，对(2.13)和 q 施以雅可比算子后得到

$$J(-2r_0\psi+r_2a^2\cos\theta,q)=0 \tag{2.14}$$

如果 $r_0\neq 0$，通过令 $\dot{\lambda}_0=-r/2r$，可以将该方程变换到(2.10)，即 $\psi=\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t)$ 确是(2.1)的解。如果 $r_0=0$，则从(2.14)可知 q 和 ψ 仅是 θ 的函数，因而 ψ 也是(2.1)的解，只不过其相角速度等于任意常数 $\dot{\lambda}_0$（此时的解为带状环流，相角速度 $\dot{\lambda}_0$ 没有明显的意义，是可以任意的）。

注2.1　如果 r_0 或 r_1 等于零，由 I 的驻点确定的流是带状环流，而且当 $r_2=0$ 时为刚体旋转状态 $\psi=-a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta$，其中 $\dot{\lambda}_z$ 为常数（流的角速度）。而 $Q'(q)=$ 常数的情形等价于 $r_1=0$。然而当且仅当 $r_2\neq 0$ 时由 $\delta I=0$ 确定的流才是非定常基流（相角速度 $\lambda_0\neq 0$），这意味着通过在泛函 I 中引入角动量守恒使我们的理论可以同时用于定常流和非定常流，但Arnold和Dikii的理论只能用于定常基流。

定理2.2　如果 $r_1Q''(q)/2$ 和 r_0 在流体中处处同号且为非负定（即 $r_1Q''\geqslant 0$）或非正定（即 $r_1Q''\leqslant 0$），则由函数 $Q(q)$ 和参量 r_0、r_1 及 r_2 通过 $\delta I=0$ 确定的基流 $\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0t)$ 对任何小扰动 $\delta\psi\in W_2^2$ 总是稳定的。

证明　若定理2.2中的条件满足，我们能取 $|\Delta^2I|$ 或更简单地取 $\|\delta\psi\|_W^2$ 作为Liapounoff泛函，其中

$$\|\delta\psi\|_W^2=\left|r_0\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right|\cdot\|\delta\psi\|^2+|r_0|\cdot\|\delta\vec{v}\|^2+\left|r_1\frac{Q''_m}{2}\right|\cdot\|\delta q\|^2 \tag{2.15}$$

$\|\cdot\|$ 是在 L_2 空间中的范数 $\|\cdot\|_w$ 是Sobolev空间中的一种范数；$|Q''_m|$ 是 $|Q''(q)|$ 的下界，即

$$|Q''(q^*)|_{\delta\psi\in S_c}\geqslant Q''_m \tag{2.16}$$

注意：本来在(2.15)中 Q''_m 应定义为 $|Q''(q^*)|$ 的下界，其中 $q^*=q+r^*\delta q$ 既包含有基流的位涡(q)，也包含有位涡扰动(δq)。不过，函数 $Q(q)$ 的定义只是对于基流来说具有本质的意义，即可以先把 $Q(q)$ 定义在基流的 q 所处的区间上，$q_m\leqslant q\leqslant q_M$，其中 q_m 和 q_M 分别记基流的 q 的最小和最大值。今若 $q^*=q+r^*\delta q$ 不在此区间上，则可以将原来的函数 Q'' 进行开拓，使得在 $q^*>q_M$ 和 $q^*<q_m$ 时都有 $|Q''(q^*)|\geqslant Q''_m$，其中的 Q''_m 满足(2.16)。我们就取这样开拓后得到的函数作为本问题有关的函数Q。于是我们有 $|\Delta^2I|\geqslant\|\delta\psi\|_W^2$。若 $\delta\psi^{(0)}\in W_2^2$ 足够小，使得

$$|\Delta^2I^0|=\left|r_0\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right|\cdot\|\delta\psi^{(0)}\|^2+|r_0|\cdot\|\delta\vec{v}^{(0)}\|^2+\left|\frac{r_1}{2}\iint_S Q''(q^{*(0)})(\delta q^{(0)})^2dS\right|<\delta \tag{2.17}$$

则因 Δ^2I 的守恒性，有

$$\|\delta\psi\|_W^2\leqslant|\Delta^2I^{(0)}|<\delta\qquad(0\leqslant t<\infty,\ \delta\psi\in S_c) \tag{2.18}$$

即基流(满足$\delta I=0$)对于任何扰动$\delta\psi\in W_2^2$是稳定的。

(2.18)的几何表示如图1。

注2.2　(2.17)表明，所谓小扰动意味着$\delta\psi$，它的一阶导数$\delta\vec{v}$、二阶导数δq在$r_1Q''(q^*)\neq 0$时的L空间的范数均足够小。这表明除$r_1Q''(q)\equiv 0$(基流是刚体转动)外，位涡度扰动(δq)在不稳定性质方面起着重要作用。当$r_1Q''(q)\equiv 0$，δq不包括在范数$\|\delta\psi\|_W$之内，但

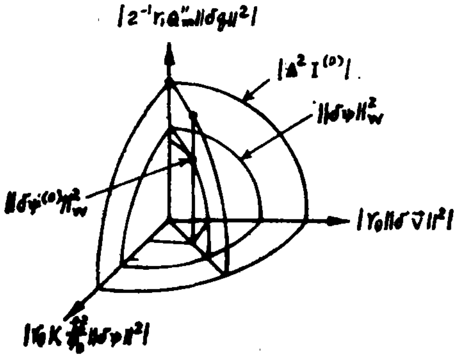

图 1　$\|\delta\psi\|_W^2$和$|\Delta^2 I^{(0)}|$的几何表示

$$\|\delta\psi\|_W^2=|\Delta^2 I|=|r_0|\left[\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\|\delta\psi\|^2+\|\delta\vec{v}\|^2\right] \tag{2.19}$$

也是全空间$\delta\psi\in W_2^2$的一种范数，且在所有时间($0<t<\infty$)它守恒。即使在此情形下，我们也能证明$\|\delta q\|$的守恒性，尽管$\|\delta q\|$在$t<\infty$的有界性在稳定性定义中并不必要求满足。其实，由于角动量守恒，且角动量为线性泛函，故还有扰动的角动量守恒

$$\delta M\equiv\iint_S\left[\sin\theta\frac{\partial\delta\psi}{\partial\theta}-\kappa\frac{a^2f_0^2}{\varphi_0}\cos\theta\cdot\delta\psi\right]dS=\delta M^{(0)} \tag{2.20}$$

又总位涡拟能也是守恒量

$$\|q+\delta q\|^2=\|q\|^2+2\iint_S q\delta q dS+\|\delta q\|^2=\text{常量} \tag{2.21}$$

现在，右边的首项守恒，而且由于基流相当于刚体转动，我们有

$$q=\left\{2\dot{\lambda}_z\left[1+\frac{\kappa f_0^2}{2\varphi_0}\cdot a^2\right]+2\omega\right\}\cos\theta \tag{2.22}$$

因而从(2.22)和δM的守恒性可知(2.21)右边第二项的守恒性(见曾庆存，1979)，最后我们就得到(2.21)右边的最后一项守恒，即$\|\delta q\|$守恒。

如果$Q''_m=0$但$r_1Q''(q)\neq 0$，$\|\delta q\|^2$的有界性能通过使用不等式

$$\|\delta q\|=\|(q+\delta q)-q\|\leqslant\|q+\delta q\|+\|q\| \tag{2.23}$$

而由总位涡拟能守恒(即(2.21))推出，虽然在此情况下不能保证在任何时间$t<\infty$内$\|\delta q\|$的微小性。

定理2.3　由函数$Q(q)$和参变量r_0、r_1和r_2表示并通过$\delta I=0$确定的$\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$可能是不稳定的，如果$r_0$与$r_1Q''(q)$的符号相反或$Q''$在流体中是一个符号不定的函数。

证明　在定理2.3中所提到的条件对不稳定性是必要的。否则根据定理2.2可知流动将是稳定的。

注2.3　对给定r_0、r_1、r_2和$Q(x)$，如果$Q'(x)$不是变量x的线性函数，那么方程(2.13)可能有多个解，因此我们可以有几个由同样集(r_0、r_1、r_2、$Q(x)$)确定的基流。假

设其中之一(例如是$\psi(\theta,\lambda,t)$)满足如下条件：(1)它的$\delta^2 I$是正定泛函；(2)$Q''(q+\delta q)$当$|\delta q|<\varepsilon$时为正定函数，当$|\delta q|<\varepsilon$不满足时为变号函数，其中q_1是流ψ_1的位涡，于是泛函$I(\psi,\vec{v},q)$(即复合泛函$I(\psi)$)在紧子空间$(\psi_1+\delta\psi,\vec{v_1}+\delta\vec{v},q_1+\delta q)$中的点$(\psi_1,\vec{v_1},q_1)$上达点极小值$I_1$(如果$\delta^2 I>0$)或极大值$I$(如果$\delta^2 I<0$)，其中$(\delta\psi,\delta v,\delta q)\in C^\infty$。也许，$\psi$对满足$|\delta q^{(0)}|<\varepsilon'<\varepsilon$的初始微扰是稳定的，但若$|\delta q^{(0)}|<\varepsilon'$不满足，则在这些扰动的作用下，流动有可能从$\psi_1$的邻域迁移到另一基流(如$\psi_2$)的邻域。

三、线性和非线性Haurwitz波的不稳定性

Haurwitz波族可以由$\delta I=0$得到，即由方程(2.13)确定。

定理3.1 (经典的)线性Haurwitz波

$$\psi-\psi_0=-a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta+\sum_{m=0}^{n}A_m P_n^m(\cos\theta)e^{im(\lambda-\dot{\lambda}_0 t)} \tag{3.1}$$

可通过$\delta I=0$由线性函数$r_1Q'(q)=2b_2q+b_1$确定，此处$P_n^m(\cos\theta)e^{im\lambda}$是归一化的球谐函数，$A_m(m=0,1\cdots\cdots n)$是一些任意常数

$$\begin{cases}\psi_0=b_1/[2(r_0+b_2\kappa f_0^2/\varphi_0)]\\ \dot{\lambda}_z=[2\omega+a^2r_2/2b_1]/[n(n+1)-2]\\ \dot{\lambda}_0=\{-2\omega+\dot{\lambda}_z[n(n+1)-2]\}/\{n(n+1)+\kappa a^2f_0^2/\varphi_0\}\end{cases} \tag{3.2}$$

$$(n=2,3,\cdots\cdots)$$

定理的证明可直接将(3.1)、(3.2)代入到(2.13)而得到。

注3.1 对一给定的线性函数$r_1Q'(q)$，方程(2.13)有解的充要条件是r_0和b_2满足如下条件

$$\begin{cases}\dfrac{r_0}{b_2}=-\left[\dfrac{n(n+1)}{a^2}+\kappa\dfrac{f_0^2}{\varphi_0}\right]\\ n=2,3,4,\cdots\cdots\end{cases} \tag{3.3}$$

这意味着对任意给定函数r_1Q'和任意参量r_0，$r_2,\cdots\cdots$，方程$\delta I=0$不一定有解，即泛函I可能无驻点。

注释3.2 对由(3.1)确定的线性Haurwitz波，有

$$\Delta^2 I=\delta^2 I=r_0\iint_S\left\{\left[|\delta\vec{v}|^2+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}(\delta\psi)^2\right]-\frac{(\delta q)^2}{\dfrac{n(n+1)}{a^2}+\kappa\dfrac{f_0^2}{\varphi_0}}\right\}dS=(\text{不变量}) \tag{3.4}$$

这里，$\delta\psi$、$|\delta\vec{v}|$和δq可以不是小量，即扰动$\delta\psi$可以是大振幅扰动，所以，由定理2.3我们得到：线性Haurwitz波可以是不稳定的，或者说至少是亚稳的。

Hoskins(1973)和其他许多人指出线性Haurwitz波

$$\psi = -a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta + A_m P_n^m(\cos\theta)e^{im(\lambda-\dot{\lambda}_0 t)} \tag{3.1}$$

可以是稳定的或不稳定的，这依赖于Haurwitz波的振幅A_m、波数m以及扰动的波数。然而这些结论只是在扰动由很少几个球谐函数表示时得到的，在一般情况下，即当扰动具有无限自由度时，线性Haurwitz波的稳定性问题仍有待解决。

现在，用E′、P′记能量和位涡拟能扰动，即

$$\begin{cases} E' \equiv \dfrac{1}{2}\left(\|\delta\vec{v}\|^2 + \kappa\dfrac{f_0^2}{\varphi_0}\|\delta\psi\|^2\right) \\ P' \equiv \dfrac{1}{2}\|\delta q\|^2 \end{cases} \tag{3.5}$$

则有(见曾庆存，1979)

$$P' = \frac{1}{a^2}N_p E' \tag{3.6}$$

因而可以重新将(3.4)写成如下形式

$$\left(1 - \frac{N_p}{N_b}\right)E' = \frac{\delta^2 I}{2r_0} \tag{3.7}$$

其中

$$N_p \equiv n_p(n_p+1) + a^2\kappa f_0^2/\varphi_0 \tag{3.8}$$

$$N_b \equiv n(n+1) + a^2\kappa f_0^2/\varphi_0 \tag{3.9}$$

n_p是扰动$\delta\psi$在二维球面上的一种加权平均波数。(3.7)告诉我们：(1)如果初始平均尺度比基流尺度大，即$n_p^{(0)} < n$，我们得到：$\delta I/2r > 0$，而且在任何时候均有$n_p < n$。因而当扰动能量发生逆串级即$n_p^{(t)} < n_p^{(0)}$时，扰动的能量$E'(t)$和位涡拟能$P'(t)$同时减小，即$E'(t) < E'(0)$，$P'(t) < P'(0)$，但当扰动能量顺串级即$n_p^{(t)}(t) > n_p^{(0)}$时，扰动能量和位涡拟能同时增加，即$E'(t) > E'(0)$，$P'(t) > P'(0)$；(2)如果$n_p^{(0)} > n$，我们有$\delta^2 I/2r_0 < 0$，且在任何时候均有，$n_p^{(0)} > n$。因此当$n_p^{(t)} > n_p^{(0)}$有$E'(t) < E'(0)$和$P'(t) < P'(0)$；但当$n_p^{(t)} < n_p^{(0)}$时有$E'(t) > E'(0)$和$P'(t) > P'(0)$。这些结果表明，扰动能量和位涡拟能总是同时增长或衰减。这与当基流满足稳定性的充分条件的情形大不一样。其实，由线性理论(见曾庆存，1983)或由(2.9)表示的$\Delta^2 I$可知，在稳定基流情况下扰动的能量和加权位涡拟能是相互补偿的，扰动能量增加伴随着加权位涡拟能减小，或者反之。

从上面分析我们可以得出结论，相对于在所有时间内有$n_p(t) < n_p^{(0)} < n$以及

$\delta^2 I(0)/2r_0>0$或$n_p(t)>n_p^{(0)}>n$以及$\delta^2 I/2r_0<0$的那些扰动，Haurwitz波(3.1)是稳定的；但相对于其它扰动，Haurwitz波则是不稳定的。在这种意义上说，Haurwitz波似是亚稳的。

注3.3 我们能找出E'的上下界。假如基流是一个由(3.1)给定的Haurwitz波，为方便计，将它改写成$\overline{\psi}$，并将扰动$\delta\psi$改写成ψ'，再假定初始扰动$\psi'^{(0)}$垂直于$\overline{\psi}^{(0)}$(由$\overline{\psi}^{(0)}\perp\psi'^{(0)}$表示)，且扰动角动量$M'^{(0)}=0$。否则，如若有任何分量“平行于”$\overline{\psi}^{(0)}$(记作$\psi'^{(0)}_{/\!/}$)，我们可从$\psi'^{(0)}$中减去$\psi'^{(0)}_{/\!/}$，并将其并入$\overline{\psi}^{(0)}$。为方便起见，我们记

$$\psi'=\psi'_{\perp}+\psi'_{/\!/} \tag{3.10}$$

且有$\psi'^{(0)}_{/\!/}=0$。今后，我们将球面上函数$F(\theta,\lambda)$的积分记为$\langle F\rangle$，例如：$\psi'^{(0)}_{/\!/}=0$就是$\overline{\psi}^{(0)}$、$\psi'^{(0)}$沿全球面的积分为零，即

$$\langle\overline{\psi}^{(0)}\psi'^{(0)}\rangle=0 \tag{3.11}$$

受扰流$\psi=\overline{\psi}+\psi'$的能量服从

$$E(\overline{\psi}+\psi')=\overline{E}+E'+\langle\nabla\overline{\psi}\cdot\nabla\psi'+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\overline{\psi}\psi'\rangle=E^{(0)}$$

以及

$$E'+\langle\nabla\overline{\psi}\cdot\nabla\psi'+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\overline{\psi}\psi'\rangle=E^{(0)}-\overline{E}=E'^{(0)} \tag{3.12}$$

此处，$\overline{E}$是基流能量。(3.12)中第二个等式是利用(3.11)后得到的。$\delta^2 I$和M'的守恒性给出

$$E'-\frac{a^2}{N_b}P'=\frac{\delta^2 I(0)}{2r_0}=(1-\frac{N_p^{(0)}}{N_b})E'^{(0)} \tag{3.13}$$

$$M'\equiv\langle\frac{\partial\psi'}{\partial\theta}\sin\theta-\kappa\frac{a^2f_0^2}{\varphi_0}\psi'\cos\theta\rangle=M'^{(0)}=0 \tag{3.14}$$

现在，在(3.12)、(3.13)和(3.14)的约束下E'的可能最大值和最小值可以用Lagrange方法确立，即满足$\delta J=0$，此处

$$J=E'+\lambda_1\left\{E'+\langle\nabla\overline{\psi}\cdot\nabla\psi'+\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\overline{\psi}\psi'\rangle\right\}+\lambda_2\{E'-(a^2/N_b)P'\}+\lambda_3 M' \tag{3.15}$$

λ_1、λ_2、λ_3是一些待定常数。通过大量仔细的运算，得到由E'_u和E'_l表示的E'的上界和下界如下

$$E'_u=\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_u^2 A^2+D_u^2\equiv(E'_{/\!/}+E'_{\perp})_u \tag{3.16}$$

$$E'_l=\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_l^2 A^2+D_l^2\equiv(E'_{/\!/}+E'_{\perp})_l \tag{3.17}$$

$$E'_{u,l}-E'^{(0)}=2\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_{u,l}^2 A^2 \tag{3.18}$$

其中$E'_{\perp}$和$E'_{/\!/}$扰动能量的两部分，它们分别垂直和平行于整族纯 Haurwitz 波（即在(3.1)中取$\dot{\lambda}_z=0$），而

$$A^2=\frac{1}{2}N_b\sum_{m=0}^{n}|A_m|^2 \tag{3.19}$$

$$\left[1-\frac{N'}{N_b}\right]_{u,l}D_{u,l}^2=\left[1-\frac{N_p^{(0)}}{N_b}\right]E'^{(0)} \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_u=1+\left(1+\frac{E'^{(0)}-D_u^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right)_l=1-\left(1+\frac{E'^{(0)}-D_u^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

$$N'=n'(n'+1)+\kappa a^2 f_0^2/\varphi_0 \tag{3.23}$$

以及n'为整数。依赖于$n_p^{(0)}>n$、$=n$或$<n$，我们有$n'\to\infty$、$=n$或$=1$。

如果$E^{(0)}/A^2\ll 1$，我们有

$$E'_u-E'^{(0)}\approx E'_{/\!/}\approx 4A^2 \tag{3.24}$$

$$E'^{(0)}-E'_l\approx\begin{cases}E'^{(0)}\left[\left(\dfrac{n_p^{(0)}(n_p^{(0)}+1)-2}{n(n+1)-2}\right)+\varepsilon\right] & (n_p^{(0)}<n)\\ \varepsilon E'^{(0)} & (n_p^{(0)}>n)\end{cases} \tag{3.25}$$

其中，$\varepsilon>0$，$O(\varepsilon)=O(E'^{(0)}/A^2)$。

(3.24)说明可能的最强扰动为

$$\psi'\approx-2(\overline{\psi}+a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta)$$

这意味着原来的即基流的波状流可能完全被破坏，受扰流动ψ变成与基流$\overline{\psi}$完全反相。其次，(3.25)则表明，由于受扰流受非线性方程控制总有一定能量保持在扰动之中。上述结果可简示如图 2。

最后我们指出，非线性(广义) Haurwitz 波可以由(3.1)确定，其中$Q'(q)$是q的非线性函数。根据定理(2.2)、(2.3)中所述条件，它们可以是稳定的或不稳定的。

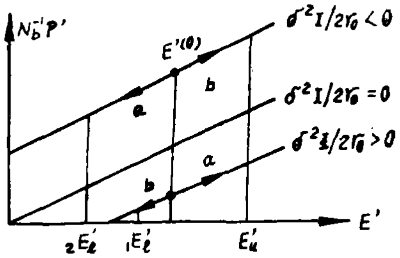

图 2　叠加于线性Hourwitz波上的扰动的能量E'和位涡拟能P'的演变过程。${}_1E'_l$和${}_2E'_l$为扰动能量的下界，分别对应于$\delta^2 I/2r_0>0$和$\delta^2 I/2r_0<0$的情况。E'_u为扰动能量的上界，$E'_u-E'^{(0)}\approx 4A^2$。a 和 b 分别表示$n_p<n_p^{(0)}$和$n_p>n_p^{(0)}$的情形。

四、地形对定常流的影响及其不稳定性

如果计入地形的影响，也有与(2.1)、(2.3)相同的方程组，但位涡度的定义不是(2.2)而是下式

$$q=\Delta\psi-\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\psi+(2\omega\cos\theta+\frac{f_0\varphi_s}{\varphi_0}) \tag{4.1}$$

其中，φ_s是地形高度的重力位势。此时总能量和广义位涡拟能仍守恒，但总角动量不一定是一个守恒量，因此，我们可以仍可取由(2.4)定义的$I(\psi)$作为不变泛函，但令$r_2=0$。这说明，(2.5)—(2.19)仍然有效，但其中取$r_2=0$，且q由(4.1)定义。我们有

定理4.1 在地形$h_s=\varphi_s/g$上的所有可能的常定基流由泛函I的驻点确定，即满足下述方程

$$\begin{cases} -2r_0\psi+r_1Q'(q)=0 \\ q=\Delta\psi-\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\psi+(2\omega\cos\theta+\frac{f_0\varphi_s}{\varphi_0}) \end{cases} \tag{4.2}$$

在地形影响之下，流动的稳定性仍可根据定理2.2和2.3来确定。

定理4.2 若在I中取$Q=q^2$和$r_2=0$，并且，$(\kappa f_0^2/\varphi_0+r_0/r_1)a^2\neq n(n+1)$，$h=1, 2, \cdots\cdots$，即$r_0/r_1$由下式确定

$$-\dot{\lambda}_z=2\omega\cdot\left[2+\left(\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)a^2\right]^{-1} \tag{4.3}$$

则$\delta I=0$有解且唯一。它就是具有刚体旋转角速度$\dot{\lambda}_z$的流受地形h_s影响取形成的定常流动。如果$r_0/r_1>0$，即

$$-\left(1+\kappa\frac{f_0^2}{2\varphi_0}a^2\right)^{-1}\leqslant\frac{\dot{\lambda}_z}{\omega}<0 \tag{4.4}$$

此流动是稳定的，但若条件(4.4)不满足，则可能是不稳定的。

证明 取$Q=q^2$，$r_2=0$，$\delta I=0$确定出定常流所满足的方程如下

$$\Delta\psi-\left(\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)\psi=-2\omega\cos\theta-\frac{f_0^2}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi_s}{f_0}\right) \tag{4.5}$$

其解为带有常数角速度$\dot{\lambda}_z$的带状流和由地形产生的扰动F的线性组合，即

$$\psi=-a^2\dot{\lambda}_z\cos\theta+F \tag{4.6}$$

此处，$\dot{\lambda}_z$由(4.3)给出，而F满足如下方程

$$\Delta F-\left(\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)F=-\frac{f_0^2}{\varphi_0}\left(\frac{\varphi_s}{f_0}\right) \tag{4.7}$$

因此，F由φ_s唯一确定，假若$(kf_0^2/\phi_0+r_0/r_1)a^2\neq -n(n+1)$的话，$n=1,2,\cdots\cdots$。

下一步，由定理2.2可知，假设$(r_0/r_1)a^2\geqslant 0$，则稳定性的充分条件是满足的。在我们这里的情形下，由$(r_0/r_1)a^2>0$，以及

$$\frac{r_0}{r_1}a^2=-\left(2+\frac{f_0^2a^2}{\varphi_0}+\frac{\omega}{\dot{\lambda}_z}\right)$$

就推出(4.4)，定理得证。

注4.1　条件

$$\left(\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}+\frac{r_0}{r_1}\right)a^2=-n(n+1)\quad n=1,2,\cdots\cdots \tag{4.8}$$

对应于共振情形。由(4.3)式，共振仅能在$\dot{\lambda}_z>0$(西风)时发生。在这种情况下，对给定的满足(4.8)的n，仅当地形函数φ_s满足下述正交条件

$$\iint_S\left[2\omega\cos\theta+\left(\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right)\frac{\varphi_s}{f_0}\right]P_n^m(\cos\theta)e^{im\lambda}dS=0 \tag{4.9}$$

$$m=0,1,2,\cdots\cdots,n$$

时，(4.5)才有解。此时解是不唯一的，它由对应于同一的n的所有球谐函数的任意线性和组成即地形对这些定常的自由波不发生作用。

注4.2　由于φ_s不显含在稳定性判据(4.4)之中，初看起来，好象地形不影响不稳定性，其实不然，因若无地形，则作刚体转动的大气运动可在取$r_1=0$当$r_0\neq 0$，$n\neq 0$　而得到，故由定理2.2即知它总是稳定的。然而地形嵌入到西风带来，形成了一些常定的波状流动，于是由它们表示的基本气流就不是带状的，而和Haurwitz波类似，可能出现不稳定性。

注4.3　在地球大气中，$1+(f_0^2/2\varphi_0)a^2\approx 3$。因而具有角速度$0>\dot{\lambda}_z>-\omega/3$的均匀东风气流在地形作用下形成的定常运动(基流)是稳定的，但均匀的西风气流($\dot{\lambda}_z>0$)或过强的东风气流($\dot{\lambda}_z<-\omega/3$)可能是不稳定的。

五、三维准地转模式的一般定理

此模式的基本方程就是位涡变守恒，可以写成与(2.1)相同的形式，但q定义如下

$$q=\Delta\psi+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f_0^2\zeta^2}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)+2\omega\cos\theta \tag{5.1}$$

这里，$0\leqslant\zeta\leqslant 1$，$c^2\equiv\alpha R\widetilde{T}$，$\alpha=R(\gamma_a-\widetilde{\gamma})/g$

$\gamma_a=g/c_p$，$\widetilde{T}(Z)$和$\widetilde{\gamma}$是平均温度垂直分布及其梯度。ψ还应满足两个边条件(见曾庆存，1979)

$$E<\infty \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\kappa'\vec{v}_s\cdot\nabla\right)b=0\quad\left(b\equiv\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)_s+\kappa\alpha_s\psi_s\right)\tag{5.3}$$

其中E是总能量(见下)，下标 s 代表在下边界 $\zeta=1$ 的给定函数，这里暂时略去地形影响，κ 和 $\kappa'=0$ 或 1，$\kappa=0$ 对应于垂直平均的整层无辐散近似；$\kappa'=0$ 对应于等熵下边界。

从位涡的守恒性和边条件(5.2)、(5.3)，我们有总能量E，"广义位涡拟能" F，角动量M和"广义边界能" B都守恒，在我们的研究中，不变泛函 $I(\psi)$就是上面提到的所有守恒量和一些参变量r_n($n=0, 1, 2, 3$)的线性组合

$$I(\psi)=2r_0E+r_1F+r_2M+2r_3B=\text{常量}\tag{5.4}$$

其中 $$E\equiv\frac{1}{2}\iint_S\left\{\kappa\frac{f_0^2\alpha_s}{c_s^2}\psi_s^2+\int_0^1\left[|\nabla\psi|^2+\left(\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^2\right]d\zeta\right\}dS\tag{5.5}$$

$$F\equiv\iint_S\int_0^1 Q(q)d\zeta dS\tag{5.6}$$

$$M\equiv\iint_S\left\{-\kappa\frac{f_0^2\alpha_s a^2}{c_s^2}\psi_s+\int_0^1 v_\lambda a\sin\theta d\zeta\right\}dS\tag{5.7}$$

$$B\equiv\iint_S G(b)dS\tag{5.8}$$

G是变量b的任意函数。

求一阶和二阶变分，得

$$\begin{aligned}\delta I=&\iint_S\int_0^1\left[-2r_0\psi+r_1Q'(q)+r_2a^2\cos\theta\right]\delta q d\zeta dS\\&+\iint_S\left\{r_3G'(b)+\frac{f_0^2}{c_s^2}(2r_0\psi_s-r_2a^2\cos\theta)\right\}\left[\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial\zeta}\right)_s\right.\\&\left.+\kappa\alpha_s\delta\psi_s\right]dS\end{aligned}\tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\delta^2I=&\iint_S\int_0^1\left\{r_0\left[|\nabla\delta\psi|^2+\left(\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\delta\psi}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{r_1}{2}Q''(q)(\delta q)^2\right\}d\zeta dS\\&+\iint_S\left\{r_0\kappa\frac{f_0^2\alpha_s}{c_s^2}(\delta\psi_s)^2+\frac{1}{2}r_3G''(b)(\delta b)^2\right\}dS\end{aligned}\tag{5.10}$$

而 $$I(\psi+\delta\psi)-I(\psi)=\delta I+\Delta^2I\tag{5.11}$$

其中 $$\begin{aligned}\Delta^2I=&\iint_S\int_0^1\left\{r_0\left[|\nabla\delta\psi|^2+\left(\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\delta\psi}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}d\zeta dS\\&+\iint_S\left\{r_0\kappa\frac{f_0^2\alpha_s}{c_s^2}(\delta\psi_s)^2+\frac{r_3}{2}G''(b^*)(\delta b)^2\right\}dS\end{aligned}\tag{5.12}$$

$$q^{*}=q+r^{*}\delta q \qquad 0\leqslant r^{*}\leqslant 1$$

$$b^{*}=b+r^{**}\delta b \qquad 0\leqslant r^{**}\leqslant 1$$

定理5.1　每一个满足三维准地转模型(5.1)以及边条件(5.2)、(5.3)的函数$\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t,\zeta)$是$I(\psi)$的驻点，且满足如下方程和边条件

$$-2r_0\psi+r_1Q'(q)+r_2a^2\cos\theta=0 \tag{5.13}$$

$$E<\infty \tag{5.14}$$

$$r_3G'(b)+\frac{f_0^2}{c_s^2}(2r_0\psi_s-r_2a^2\cos\theta)=0 \tag{5.15}$$

其中G和Q是两个给定的函数，r_n是一些参量，$n=0,1,2,3$，相角速$\dot{\lambda}_0=-r_2/2r_0$。逆定理亦真。

定理5.1的证明基本上与定理2.1相同。

定理5.2　一个由函数$Q(q)$、$G(b)$和参量$r_n(n=0,1,2,3)$通过$\delta I=0$确定的三维基流函数$\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t,\zeta)$，若其$r_0$、$r_1Q''(q)$、$r_0\kappa\alpha_s/c_s^2$和$rG''(b)$都是非正的或都非负的，则对任何小扰动都是稳定的。

定理5.3　如果r_0、r_1Q''、$r_0\kappa\alpha_s/c_s^2$和r_3G''没有同样的符号，或者Q''、G''是非定号函数，则基流$\psi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t,\zeta)$可能是不稳定的。

定理5.2和定理5.3的证明也基本上与定理2.2和2.3的证明相同，但需取三维L_2空间的范数$\|.\|_{3w}$和三维Sobolev空间范数$\|.\|_{3w}$。和(2.15)类似，今取

$$\|\delta\psi\|_{3w}^2=\left|r_0\kappa\frac{f_0^2}{\varphi_0}\right|\cdot\|\delta\psi_s\|^2+\left|\frac{1}{2}r_3G''_m\right|\cdot\|\delta b\|^2+|r_0|\cdot\|\nabla_3\delta\psi\|_3^2+\left|\frac{1}{2}r_1Q''_m\right|\cdot\|\delta q\|_3^2 \tag{5.16}$$

其中$\|.\|$与(2.15)中所定义的一样，即为定义在半径为a的球面上的L_2空间的范数；$|Q''_m|$和$|G''_m|$分别是$|Q''(q^*)|$和$|G''(b^*)|$的下界，即

$$\begin{cases}|Q''(q^*)|_{\delta\psi\in S_c}\geqslant Q_m\\|G''(b^*)|_{\delta\psi\in S_c}\geqslant G_m\end{cases} \tag{5.17}$$

而∇_3则是准三维梯度算子

$$\nabla_3\delta\psi\equiv\nabla\delta\psi+\vec{k}\left(\frac{f_0\zeta}{c}\right)\frac{\partial\delta\psi}{\partial\zeta} \tag{5.18}$$

其泛函$\|\nabla_3\delta\psi\|_3$定义如下

$$\|\nabla_3\delta\psi\|_3^2=\|\nabla\delta\psi\|_3^2+\|\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\delta\psi}{\partial\zeta}\|_3^2=\|\delta\vec{v}\|_3^2+\|\frac{f_0\zeta}{c}\frac{\partial\delta\psi}{\partial\zeta}\|_3^2 \tag{5.19}$$

于是我们有

$$\|\delta\psi\|^2_{3w} \leqslant |\Delta^2 I^{(0)}| \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{5.20}$$

因而当 $|\Delta^2 I^{(0)}| < \delta$，则在所有时间内有 $\|\delta\psi\|^2_{3w} < \delta$。

定理5.2的几何表示与图1类似。

注5.1　在三维斜压大气中的所有Haurwitz波族能由 $\delta I = 0$ 确定，同时，我们也可以得到与第三节相类似的结论。斜压Haurwitz波已在一些文献中给出（例如见：曾庆存，1979）。

注5.2　在下边界为等位温面情况下，三维准地转模式的定常基流的不稳定性判据，曾由Blumen(1968)求得，显然它是我们求得的普遍判据的特例。其次，当下边界不是等位温面时，Blumen(1978)和Zeng(1983)曾求得线性化模式和带状基流的稳定性判据，它同样也是此处我们给出的普适判据的特例。然而必须指出，只有用我们的方法并取 $r_2 \neq 0$ 才能得到非定常基流（斜压大气中线性或非线性Haurwitz波）的不稳定性判据。

注5.3　当考虑到地形影响时，位涡度守恒和(5.1)—(5.3)同样成立，只不过此时有

$$b \equiv \left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)_s + \kappa\alpha_s\psi_s + \alpha_s f_0^{-1}\varphi_s \tag{5.21}$$

这里 $Z_s(\theta, \lambda) = \varphi_s(\theta, \lambda)/g$ 是地形高度。有地形影响时角动量守恒不再成立。我们有与第四节相似的结论。定理5.1、5.2和5.3也都有效。但此时应取 $r_2 = 0$，因而由地形影响产生的定常流能通过 $\delta I = 0$ 而得到，而且，地形对稳定性的影响通过 $G''(b)$ 直接进入到判据之中。

六、正压原始方程组

基本方程组就是大家熟知的浅水波方程组，但写在旋转球面上，并且要计入科里奥利力。这组方程可以变换成

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - \varphi q v_\lambda = -\frac{\partial K}{a\partial\theta} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \varphi q v_\theta = -\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla q = 0 \tag{6.3}$$

其中

$$K = \varphi + \frac{1}{2}(v_\theta^2 + v_\lambda^2) \tag{6.4}$$

$$q = \frac{1}{\varphi}\left\{\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\lambda \sin\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}\right) + 2\omega\cos\theta\right\} \tag{6.5}$$

而 φ 是自由表面的重力位势。容易证明方程组(6.1)—(6.5)等价于在流体力学和动力气象学中所普遍使用的该模式的方程组，其实，连续方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\varphi\vec{v}=0 \tag{6.6}$$

可以很容易地由(6.1)、(6.2)和位涡度守恒式(6.3)联立而得到，假如 $q\neq 0$ 的话，(6.6)中 $\nabla\cdot(\ )$ 是在半径为 a 的球面上的二维散度算子。

此模式亦有质量、角动量、能量和广义位涡拟能守恒，于是可构造不变泛函如下

$$2I(\vec{v},\varphi)=2r_0E+r_1F+2r_2M+r_3Ma \tag{6.7}$$

其中

$$E\equiv\frac{1}{2}\iint_S[\varphi|\vec{v}|^2+\varphi^2]dS \tag{6.8}$$

$$F\equiv\iint_S\varphi Q(q)dS \tag{6.9}$$

$$M\equiv\iint_S\varphi a(v_\lambda+a\omega\sin\theta)\sin\theta dS \tag{6.10}$$

$$Ma=\iint_S\varphi dS \tag{6.11}$$

$Q(q)$是自变量 q 的任意函数。

q 是 $\vec{v}$、φ 的函数。为方便起见，我们用 δq 记 $q(\vec{v}+\delta\vec{v},\ \varphi+\delta\varphi)$ 和 $q(\vec{v},\ \varphi)$ 之间的差。即

$$\begin{aligned}\delta q&\equiv q(\vec{v}+\delta\vec{v},\varphi+\delta\varphi)-q(\vec{v},\varphi)\\&=\frac{1}{\varphi+\delta\varphi}\left[\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)\right]-q\frac{\delta\varphi}{\varphi+\delta\varphi}\end{aligned} \tag{6.12}$$

我们有

$$\delta q=\delta^1q+\delta^2q+\cdots\cdots \tag{6.13}$$

和

$$\delta q=\delta^1q+\Delta^2q \tag{6.14}$$

其中

$$\delta^1q=\frac{1}{\varphi a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)-q\frac{\delta\varphi}{\varphi} \tag{6.15}$$

$$\delta^2q=\frac{-1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)\frac{\delta\varphi}{\varphi}+q\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)^2=-\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)\delta^1q \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2q=\delta q-\delta^1q&=\frac{\delta\varphi}{\varphi}\left[\left(\frac{-1}{\varphi+\delta\varphi}\right)\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial\delta v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial\delta v_\theta}{\partial\lambda}\right)\right.\\&\left.+q\frac{\delta\varphi}{\varphi+\delta\varphi}\right]=-\left(\frac{\delta\varphi}{\varphi}\right)\delta q\end{aligned} \tag{6.17}$$

利用公式(6.15)—(6.17)，可以得到泛函 I 的一阶和二阶变分如下

$$2\delta I=\iint_S\Big\{\Big[r_0(2\varphi+|\vec{v}|^2)+2r_2(v_\lambda+a\omega\sin\theta)a\sin\theta+r_1(Q-qQ')+r_3\Big]\delta\varphi$$

$$+\Big[r_0 2\varphi v_\theta+r_1Q''\frac{\partial q}{a\sin\theta\partial\lambda}\Big]\delta v_\theta+\Big[r_0 2\varphi v_\lambda+2r_2\varphi a\sin\theta$$

$$-r_1Q''\frac{\partial q}{a\partial\theta}\Big]\delta v_\lambda\Big\}dS \tag{6.18}$$

$$2\delta^2 I=\iint_S\Big\{\Big[r_0\Big[\varphi|\delta\vec{v}|^2+(\delta\varphi)^2+2\delta\varphi\vec{v}\cdot\delta\vec{v}\Big]+r_1\Big[\frac{\varphi}{2}Q''(q)(\delta^1 q)^2$$

$$+Q'(q)(\varphi\delta^2 q+\delta\varphi\delta^1 q)\Big]+2r_2a\delta\varphi\delta v_\lambda\sin\theta\Big\}dS$$

$$=\iint_S\Big\{r_0\varphi\Big[\delta v_\lambda+(v_\lambda+a\frac{r_2}{r_0}\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi}\Big]^2+r_0\varphi\Big[\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi}\Big]^2$$

$$+r_0\Big(1-\frac{(v_\lambda+ar_0^{-1}r_2\sin\theta)^2+v_\theta^2}{\varphi}\Big)\Big[\delta\varphi\Big]^2$$

$$+r_1\frac{\varphi}{2}Q''(q)[\delta^1 q]^2\Big\}dS \tag{6.19}$$

$I(\vec{v}+\delta\vec{v},\ \varphi+\delta\varphi)$和$I(\vec{v},\ \varphi)$之间的差由下式给出

$$I(\vec{v}+\delta\vec{v},\ \varphi+\delta\varphi)-I(\vec{v},\ \varphi)=\delta I+\delta^2 I+\cdots\cdots \tag{6.20}$$

或

$$I(\vec{v}+\delta\vec{v},\ \varphi+\delta\varphi)-I(\vec{v},\ \varphi)=\delta I+\Delta^2 I \tag{6.21}$$

其中

$$2\Delta^2 I=\iint_S\Big\{r_0\Big[\varphi^{**}|\delta\vec{v}|^2+(\delta\varphi)^2+2\delta\varphi(\vec{v}\cdot\delta\vec{v})\Big]$$

$$+r_1\Big[\frac{1}{2}\varphi^{**}Q''(q^*)(\delta q)^2+\varphi Q'(q)\Delta^2 q$$

$$+Q'(q)\delta\varphi\delta q\Big]+2r_2a\delta\varphi\delta v_\lambda\sin\theta\Big\}dS$$

$$=\iint_S\Big\{r_0\varphi^{**}\Big[\delta v_\lambda+(v_\lambda+ar_2r_0^{-1}\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\Big]^2$$

$$+r_0\varphi^{**}\Big[\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\Big]^2+r_1\frac{\varphi^{**}Q''(q^*)}{2}\Big[\delta q\Big]^2$$

$$+r_2\Big(1-\frac{(v_\lambda+ar_2r_0^{-1}\sin\theta)^2+v_\theta^2}{\varphi^{**}}\Big)\Big[\delta\varphi\Big]^2\Big\}dS \tag{6.22}$$

$$(\varphi^{**}\equiv\varphi+\delta\varphi\quad q^*=q+r^*\delta q\quad 0\leqslant r^*\leqslant 1)$$

(6.22)与(6.19)在系数上不一样，在(6.22)右端的积分号下φ和$Q''(q)$分别由φ^{**}和$Q''(q^*)$所代替，这是由于

$$(\varphi+\delta\varphi)|\vec{v}+\delta\vec{v}|^2=(\varphi+\delta\varphi)(|\vec{v}|^2+2\vec{v}\cdot\delta\vec{v}+|\delta\vec{v}|^2)=\varphi|\vec{v}|^2$$

$$+[|\vec{v}|^2\delta\varphi+2\varphi\vec{v}\cdot\delta\vec{v}]+[2\delta\varphi\vec{v}\cdot\delta\vec{v}+\varphi^{**}|\delta\vec{v}|^2]$$

$$(\varphi+\delta\varphi)Q(q+\delta q)=(\varphi+\delta\varphi)[Q(q)+Q'(q)\delta q+\frac{1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2]$$

$$=\varphi Q(q)+[Q(q)\delta\varphi+\varphi Q'(q)\delta^1 q]+[\varphi Q'(q)\Delta^2 q$$

$$+Q'(q)\delta\varphi\delta q+\frac{1}{2}\varphi^{**}Q''(q^*)(\delta q)^2]$$

定理6.1　原始方程组(6.1)—(6.3)的每一行波解集($v(\theta,\lambda-\lambda t)$，$v(\theta,\lambda-\lambda t)$，$\varphi(\theta,\lambda-\lambda t)$)对应于泛函空间($v,\varphi$)中$I(v)\varphi$的一个驻点，且可由如下方程组确定

$$2\Phi\equiv 2r_0\left[K+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta(v_\lambda+a\omega\sin\theta)\right]=-r_1(Q-qQ')-r_3 \tag{6.23}$$

$$\varphi q v_\theta=-\frac{\partial\Phi}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{6.24}$$

$$\varphi q\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)=\frac{\partial\Phi}{a\partial\theta} \tag{6.25}$$

其中设$r_0\neq 0$，而相速度$\dot{\lambda}_0=-r_2/r$。逆定理亦真。

证明：设($\vec{v}(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$，$\varphi(\theta,\lambda-\dot{\lambda}_0 t)$)是方程组(6.1)—(6.3)的解，将其代入(6.1)—(6.3)，因此时有$\partial/\partial t=-\dot{\lambda}_0\partial/\partial\lambda$，故有

$$-\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}-\varphi q v_\lambda=-\frac{\partial K}{a\partial\theta} \tag{6.26}$$

$$-\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\varphi q v_\theta=-\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{6.27}$$

$$-\dot{\lambda}_0\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\vec{v}\cdot\nabla q=0 \tag{6.28}$$

如若按(6.23)中第一个等式定义函数Φ，且令$r_2/r_0=-\dot{\lambda}_0$和$r_0=1$，就有

$$-\frac{\partial K}{a\partial\theta}=-\frac{\partial\Phi}{a\partial\theta}-\dot{\lambda}_0\varphi q a\sin\theta-\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}$$

$$-\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda}+\dot{\lambda}_0\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}=-\frac{\partial\Phi}{a\sin\theta\partial\lambda}$$

将其代入(6.26)、(6.27)就推得(6.24)、(6.25)。其次，由(6.26)和(6.27)我们还有

$$\vec{v}\cdot\nabla q=\left(\frac{\partial\Phi}{\varphi q a\partial\theta}+\dot{\lambda}_0 a\sin\theta\right)\frac{\partial q}{a\sin\theta\partial\lambda}-\left(\frac{\partial\Phi}{\varphi q a\sin\theta\partial\lambda}\right)\frac{\partial q}{a\partial\theta}$$

$$=\frac{1}{\varphi q}J(\Phi,q)+\dot{\lambda}_0\frac{\partial q}{\partial\lambda} \tag{6.29}$$

将其代入(6.28)后得到

$$\left(\frac{1}{\varphi q}\right)J(\Phi,q)=0 \tag{6.30}$$

因此，2Φ是以q为自变量的函数，记作$\Phi(q)$。至于函数$r_1Q(q)$，则可通过求解下列常微分方程得到

$$r_1[Q(q)-qQ'(q)]-r_3=2\Phi(q) \tag{6.31}$$

此处，r_1、r_3为常数，$r_1\neq0$。因此，(6.23)也满足。定理得证。

下面我们来证明逆定理。设函数(v，φ)满足方程组(6.23)—(6.25)。按(6.23)，可用K和v表达Φ，于是由(6.24)和(6.25)，就得(6.26)和(6.27)，且有$\dot{\lambda}_0=-r_2/r_0$。

接着，由(6.24)和(6.25)我们就可以得到(6.29)。此外，(6.23)中的第二个等式意味着2Φ是变量q的函数，从而$I(\Phi,q)=0$。这样一来，由(6.29)也就推得(6.28)。所有这些就表明函数($\vec{v}$,φ)确实构成方程组(6.1)—(6.3)的行波解，并且$\dot{\lambda}_0=-r_2/r_0$。

注6.1 尽管在曾庆存的书(1979)中没有用到变分原理，为了寻找原始方程组的常定特解，书中已经得到了相应于$r_2=0$时方程组(6.23)—(6.25)；书中并发展了一种类似于求解$r_2\neq0$时的方程组(6.23)—(6.25)的方法，以得到广义的Haurwitz波。广义的Haurwitz波是原始方程组的解，是第三节中的经典Haurwitz波的修正。一些这样的特解可以在曾庆存的书以及曾庆存、张学洪和袁重光的文章(1985)中找到。

注6.2 对于给定集合(r_0，r_1，r_2，r_3和$Q(q)$)，可由方程$\delta I=0$得到方程组(6.1)—(6.3)的解($\vec{v}$，ϕ)。利用该解并重复定理6.1中的步骤，我们就可由(6.31)构造$r_0\neq0$的新函数$Q(q)$，这就意味着在不失普适性的情况下，我们总可取$r_0\neq0$。此外在不失普适性的情况下，我们也可取$r_0=r_1=1$，因为r_1在Q中可看成一个系数，并且$r_1=0$等价于$Q\equiv0$。

定理6.2由$\delta I=0$确定的流动，对于能使$\Delta^2 I$是($\delta\vec{v}$，$\delta\varphi$，δq)的定号泛函的扰动子空间而言是稳定的；但对于补空间而言可能是不稳定的。

定理6.2的证明与定理2.2、2.3的证明基本相同。特别地，如果对一给定的扰动($\delta\vec{v}$，$\delta\varphi$)，其$Q''(q^*)$和ϕ^{**}分别有下界Q_m''和φ_m，且满足

$$Q''(q^*)\geqslant Q_m''\geqslant0 \tag{6.32}$$

$$\begin{cases}\varphi^{**}\geqslant\varphi_m\\ \text{and}\quad \varphi_m\geqslant(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)^2+v_\theta^2\end{cases} \tag{6.33}$$

则对所有 $t\geqslant 0$，我们能取$\Delta^2 I$或更简单地取

$$\|\delta\vec{v},\delta\varphi\|_w^2=\varphi_m\left[\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|^2+\|\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|^2\right]$$

$$+(1-Fr_m)\|\delta\varphi\|^2+\frac{1}{2}\varphi_m Q''_m\|\delta q\|^2 \tag{6.34}$$

作为Liapoounoff范数，并有

$$\|\delta\vec{v},\delta\varphi\|_w^2\leqslant\Delta^2 I^{(0)} \tag{6.35}$$

此处，Fr是Frounde数的上界

$$Fr_m=\max\left(\frac{[v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta]^2+v_\theta^2}{\varphi^{**}}\right) \tag{6.36}$$

且取 $r_0=r_1=1$。如果 $Fr_m<1$，则 $\|\delta\phi\|^2$、$\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\lambda\sin\theta)\delta\varphi/\varphi^{**}\|^2$和 $\|\delta v_\theta+v_\theta\delta\varphi/\varphi^{**}\|^2$的一致有界性通过(6.35)就可以得到保证，进而还可求得$\|\delta v_\theta\|^2$和$\|\delta v_\lambda\|^2$的一致有界性。其实，我们有

$$\|\delta v_\lambda\|=\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}-(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|$$

$$\leqslant\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|+\|(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|$$

$$\leqslant\|\delta v_\lambda+(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|+\|v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta\|\frac{1}{\varphi_m}\|\delta\varphi\|$$

$$\|\delta v_\theta\|\leqslant\|\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta\varphi}{\varphi^{**}}\|+\|v_\theta\|\frac{1}{\varphi_m}\|\delta\varphi\|$$

当取了$r_0=r_1=1$之后，不稳定性的必要条件是以下条件中之一：(a)$Q''(q^*)$不是一个非负函数，即在一些区域中

$$Q''(q^*)<0 \tag{6.37}$$

或者(b)，存在一些区域，在其内有

$$1-\frac{(v_\lambda-a\dot{\lambda}_0\sin\theta)^2+v_\theta^2}{\varphi^{**}}<0 \tag{6.38}$$

注6.3　根据在线性化模式的理论(曾，1979，1986)，在基流为带状的且为定常的情况下，不稳定性可分为三类：条件(6.37)给出正压不稳定和惯性不稳定(对称不稳定是它的特例)；而条件(6.38)是只给出超临界高速不稳定，此种不稳定首先由Lin(1955年)在空气动力学中给出，继由曾庆存(1962，未发表的文章)在旋转一维浅水模式中给出，后又被Blumen(1970)和Salomura(1981)推广到二维无科氏力的浅水模式，而曾庆存(1979)则推广到有科氏力的二维情况。

注6.4 在带状且定常基流情形下，不稳定性存在的必要条件(6.37)和(6.38)基本上与线性理论相同，但量上稍有不同。在非线性情况下，我们有(6.38)，而在线性情况下，由$\delta^2 I$的分析或由以前的线性理论(曾，1979，1986)结果则有

$$1-\frac{(v_\lambda - a\dot{\lambda}_0 \sin\theta)^2}{\varphi}<0 \tag{6.39}$$

对比(6.39)与(6.38)可知：当$Q''>0$(这时只可能发生超临界高速不稳定性)，非线性理论给出的存在超临界高速不稳定性的区域要比线性理论预计的大。其实，如果带状常定基流处于临界稳定状态附近，则一个微小的但却是负的$\delta\varphi$可能使条件(6.38)得到满足，因而基流稳定性可能遭到破坏。相似的考虑也能应用到正压不稳定和惯性不稳定的分析上。这个例子告诉我们考虑非线性的重要性，尽管乍一看起来线性化方程对于微小扰动而言是有效的。

七、分层流模式

假设有J薄层均匀流体，其上边界面密度和速度分别由Z_k、P_k和$\vec{v}_k$表示，$k=1,2,3,\cdots\cdots,J$(见图3)，我们有如下的基本方程组(见曾庆存，1979)

$$\frac{\partial v_{\theta k}}{\partial t}+\vec{v}_k\cdot\nabla v_{\theta k}=-\frac{\partial\varphi_k}{a\partial\theta}+(2\omega\cos\theta+\frac{v_\lambda}{a}\mathrm{ctg}\theta)v_\lambda \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial v_{\lambda k}}{\partial t}+\vec{v}_k\cdot\nabla v_{\lambda k}=-\frac{\partial\varphi_k}{a\sin\theta\partial\lambda}-(2\omega\cos\theta+\frac{v_\lambda}{a}\mathrm{ctg}\theta)v_\theta \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{v}_k h_k=0 \tag{7.3}$$

$$k=1,2,\cdots\cdots,J$$

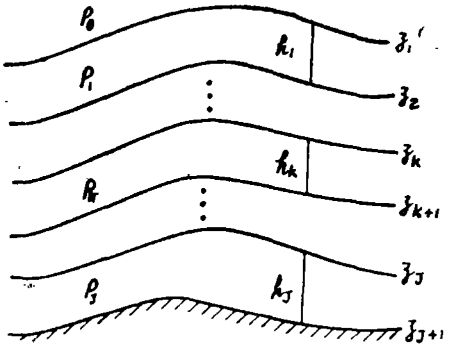

图3 分层流模式示意图

此处，$h_k=Z_k-Z_{k+1}$是第k层流体的厚度，φ_k是其上界面的析合重力位势，即

$$\varphi_k=\sum_{k'=1}^{k}\frac{\rho_{k'}-\rho_{k'-1}}{\rho_k}gZ_{k'} \tag{7.4}$$

此外，为简单起见，取$\rho_0\equiv 0$，而$Z_{J+1}(\theta,\lambda)$则是给定的不随时间而变的最低层流体的下边界的高度。

用这个模式来近似描述海洋比描述大气要更好些。不过，这是一个有趣的模式，因为它部分地表示了斜压性，而且在该模式启发下，我们能够探讨在垂直上离散化了的模式和连续模式之间的区别及其机理。

与(6.1)、(6.2)、(6.3)类似，方程组(7.1)、(7.2)、(7.3)可以很容易地变换成如下形式

$$\frac{\partial v_{\theta k}}{\partial t}-h_k q_k v_{\lambda k}=-\frac{\partial K_k}{a\partial\theta} \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial v_{\lambda k}}{\partial t}+h_k q_k v_{\theta k}=-\frac{\partial K_k}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial t}+\vec{v}_k\cdot\nabla q_k=0 \tag{7.7}$$

其中

$$K_k\equiv\varphi_k+\frac{1}{2}|\vec{v}_k|^2 \tag{7.8}$$

$$q_k\equiv\frac{1}{h_k}\left\{\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial v_{\lambda k}\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial v_{\theta k}}{\partial\lambda}\right)+2\omega\cos\theta\right\} \tag{7.9}$$

我们有不变泛函如下

$$2I(\vec{v},\varphi)=2r_0E+2r_2M+\sum_{k=1}^{J}(r_{1k}F_k+r_{3k}Ma_k) \tag{7.10}$$

其中$\vec{v}$和φ包含了所有分量$\vec{v}_k$和φ_k，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, J$

$$E\equiv\frac{1}{2}\iint_S\sum_{k=1}^{J}\rho_k\left(h_k|\vec{v}_k|^2+\frac{\rho_k-\rho_{k-1}}{\rho_k}gZ_k^2\right)dS \tag{7.11}$$

$$M\equiv\iint_S\sum_{k=1}^{J}a\rho_k h_k\sin\theta(v_{\lambda k}+a\omega\sin\theta)dS \tag{7.12}$$

$$F_k\equiv\iint_S\rho_k h_k Q_k(q_k)dS \tag{7.13}$$

$$Ma_k\equiv\iint_S\rho_k h_k dS \tag{7.14}$$

$Q_k(q_k)$是自变量的任意函数，也依赖于下标k。此外，若$Z_s(\theta,\lambda)\neq0$，则应取$r_2=0$。

现在，我们有

$$\begin{aligned}2\delta I=\sum_{k=1}^{J}\iint_S\Big\{&\left[2r_0h_kv_{\theta k}+r_{1k}Q''_k(q_k)\frac{\partial q_k}{a\sin\theta\partial\lambda}\right]\delta v_{\theta k}\\&+\left[2r_0h_kv_{\lambda k}+2r_2h_ka\sin\theta-r_{1k}Q''_k(q_k)\frac{\partial q_k}{a\partial\theta}\right]\delta v_{\lambda k}\\&+\Big[r_0(2\varphi_k+|\vec{v}_k|^2)+2r_2(v_{\lambda k}+a\omega\sin\theta)a\sin\theta\\&+r_1(Q_k-q_kQ'_k(q_k))+r_{3k}\Big]\delta h_k\Big\}\rho_k dS\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$2\delta^2 I=\iint_S \sum_{k=1}^{J}\left\{r_0 h_k\left(\left[\delta v_{\lambda k}+U_k\frac{\delta h_k}{h_k}\right]^2+\left[\delta v_{\theta k}+v_{\theta k}\frac{\delta h_k}{h_k}\right]^2\right)\right.$$

$$+r_0 g\left[\left(\frac{\rho_k-\rho_{k-1}}{\rho_k}-\frac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k}-\frac{\rho_{k-1}|\vec{V}|_{k-1}^2}{\rho_k g h_{k-1}}\right)(\delta Z_k)^2\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k}\delta Z_k\delta Z_{k+1}\right]+r_{1k}\frac{h_k}{2}Q''_k(q_k)(\delta^1 q_k)^2\right\}\rho_k dS \tag{7.16}$$

$$2\Delta^2 I=\iint_S \sum_{k=1}^{J}\left\{r_0 h_k^{**}\left(\left[\delta v_{\lambda k}+U_k\frac{\delta h_k}{h_k^{**}}\right]^2+\left[\delta v_{\theta k}+v_{\theta k}\frac{\delta h_k}{h_k^{**}}\right]^2\right)\right.$$

$$+r_0 g\left[\left(\frac{\rho_k-\rho_{k-1}}{\rho_k}-\frac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k^{**}}-\frac{\rho_{k-1}|\vec{V}|_{k-1}^2}{\rho_k g h_{k-1}^{**}}\right)(\delta Z_k)^2\right.$$

$$\left.\left.+2\frac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k^{**}}\delta Z_k\delta Z_{k+1}\right]+r_{1k}\frac{h_k}{2}Q''_k(q_k^{*})(\delta q_k)^2\right\}\rho_k dS \tag{7.17}$$

其中
$$U_k\equiv v_{\lambda k}+ar_2 r_0^{-1}\sin\theta,\quad \vec{V}_k\equiv\vec{\theta}^0 v_{\theta k}+\vec{\lambda}^0 U_k \tag{7.18}$$

$$h_k^{**}\equiv h_k+\delta h_k\quad q_k^{*}\equiv q_k+r_k^{*}\delta q_k\quad 0\leqslant r_k^{*}\leqslant 1 \tag{7.19}$$

注意到任一个二次型能够通过合适的线性变换化成对角型。例如，引入

$$\delta\eta=\mathbf{X}^{-1}\delta\mathbf{Z} \tag{7.20}$$

就有

$$\sum_{k=1}^{J}\rho_k\left\{\left[\frac{\rho_k-\rho_{k-1}}{\rho_k}-\left(\frac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k^{**}}-\frac{\rho_{k-1}|\vec{V}|_{k-1}^2}{\rho_k g h_{k-1}^{**}}\right)\right](\delta Z_k)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k^{**}}\delta Z_k\delta Z_{k+1}\right\}\equiv(\mathbf{B}\delta\mathbf{Z},\delta\mathbf{Z})=\sum_{j=1}^{J}\mu_j(\delta\eta_j)^2 \tag{7.21}$$

其中$\delta\eta$和δZ是两个矢量

$$\delta\eta=(\delta\eta_1,\cdots\cdots,\delta\eta_j,\cdots\cdots,\delta\eta_J)$$

$$\delta\mathbf{Z}=(\delta Z_1,\cdots\cdots,\delta Z_j,\cdots\cdots,\delta Z_J)$$

$\mathbf{B}$是矩阵，μ_j和$\mathbf{X}_j$分别是本征值和本征向量

$$\mathbf{B}\equiv\{b_{kk'}\},\ (k,k'=1,2,\cdots\cdots,\vec{J}) \tag{7.22}$$

$$\begin{cases} b_{kk}=\rho_k\left[\dfrac{\rho_k-\rho_{k-1}}{\rho_k}-\left(\dfrac{|\vec{V}_k|^2}{gh_k^{**}}-\dfrac{\rho_{k-1}|\vec{V}|_{k-1}^2}{\rho_k g h_{k-1}^{**}}\right)\right] \\ b_{k,k+1}=b_{k+1,k}=\dfrac{|\vec{V}|}{gh_k^{**}}\rho_k \\ b_{k,k'}=0,\quad (|k-k'|\geqslant 2) \end{cases}$$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{X}_j=\mu_j\mathbf{X}_j \tag{7.23}$$

矩阵X包含J个本征矢量

$$\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{X}_J] \tag{7.24}$$

与前节所得的结论相似，我们有如下定理。

定理7.1 分层流模式(7.1)—(7.3)的每一列波或定常流解，均对应于$I(\vec{v},\ \phi)$的驻点，即$\delta I=0$，逆定理亦真。

定理7.2 由$\delta I=0$确定的基流对于扰动为稳定的充分条件是：(1)r_0和$r_{1k}Q''_k(q_k^{*})$有同样的符号；(2)所有的$\mu_j>0$，$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ J$。

为了探明分层流模式的不稳定性的分类和它们的机理，我们先取二层模式为例。此时有

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\left\{\dfrac{\rho_1-\rho_0}{\rho_1}-\dfrac{|\vec{V}_1|^2}{gh_1^{**}}\right\}\rho_1 & \dfrac{|\vec{V}_1|^2}{gh_1^{**}}\rho_1\\ \dfrac{|\vec{V}_1|^2}{gh_1^{**}}\rho_1 & \rho_2\left\{\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}-\left(\dfrac{|\vec{V}_2|^2}{gh_2^{**}}+\dfrac{\rho_1|\vec{V}_1|^2}{\rho_2 gh_1^{**}}\right)\right\}\end{bmatrix}$$

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{(a_1+a_2-b_1)\pm\left[(a_1-a_2+b_1)^2+4\rho_1^2\frac{|\vec{V}_1|^4}{g^2h_1^{**2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{7.25}$$

其中

$$a_1\equiv\left(1-\frac{|\vec{V}_1|^2}{gh_1^{**}}\right)\rho_1\quad a_2\equiv\left(1-\frac{|\vec{V}_2|^2}{gh_2^{**}}\right)\rho_2\quad b_1\equiv\left(1+\frac{|\vec{V}_1|^2}{gh_1^{**}}\right)\rho_1 \tag{7.26}$$

从(7.25)很明显地看出，B有一个负的本征值的充分条件为下列二条件之任一个

$$a_1+a_2-b_1\leqslant 0 \tag{7.27}$$

$$(a_1-a_2+b_1)^2+4\left(\rho_1\frac{|\vec{V}_1|^2}{gh_1^{**}}\right)^2>(a_1+a_2-b_1)^2 \tag{7.28}$$

条件(7.27)可以写成

$$1-\left(\frac{|\vec{V}_2|^2}{gh_2^{**}}+2\frac{\rho_1|\vec{V}_1|^2}{\rho_2 gh_1^{**}}\right)\leqslant 0 \tag{7.27$'$}$$

(a)假设基流无垂直切变，即$\vec{V}_1=\vec{V}_2$，但设$\dot{\lambda}_1\equiv V_{\lambda 1}(a\sin\theta)$有水平切变，即对任一$r_2$，都有$|\vec{V}_1|\neq 0$。若速度$|\vec{V}_1|$在一些区域内足够大，以至于

$$|\vec{V}_1|^2\geqslant\left[\frac{1}{gh_2^{**}}+\frac{2\rho_1}{\rho_2 gh_1^{**}}\right]^{-1} \tag{7.29}$$

因而(7.27)得到满足。可见，这正是超临界高速不稳定。

(b)设有另一种情况，即设$\dot{\lambda}_k$无水平切变但有垂直切变，即$\dot{\lambda}_1$和$\dot{\lambda}_2$为二常数，但

$\dot{\lambda}_1 \neq \dot{\lambda}_2$。如果没有地形影响，我们可选择一个$r_2$，使得$|\vec{V}_1| = 0$，但$|\vec{V}_2| \neq 0$；或者$|\vec{V}_2| = 0$，但$|\vec{V}_1| \neq 0$。若在第一种情况下有

$$1 - |\vec{V}_2|^2 / g h_2^{**} \leqslant 0 \tag{7.30}$$

或者第二种情况下有

$$1 - 2\frac{\rho_1 |\vec{V}_1|^2}{\rho_2 g h_1^{**}} \leqslant 0 \tag{7.31}$$

则(7.27)也得到满足。可见这正是重力作用下具有垂直切变的基流的 Helmholtz 不稳定，只不过在这里受浅水近似引入了一定的修正。本来，由Helmholtz理论可知，只要基流有垂直切变，无论大小，总存在不稳定波，但不稳定波限于水平波长小于某一临界值的短波一侧，此临界波长随垂直切变的增大而增大。换言之，欲使具有给定水平波长的扰动成为不稳定的，必须基流的垂直切变超过一定的临界值。今在我们的分层流模式中取了浅水近似，它仅能用于长波，这就是为什么在我们的分层流模式中要使 Helmholtz不稳定发生必须垂直切变超过某一临界值。

(c)条件(7.28)可以改写成

$$M_1^2 - M_2^2 > \frac{(1 - M_1^2)^2 \beta - M_1^4}{(1 - \beta)(1 - M_1^2)} \tag{7.32}$$

其中

$$M_k^2 \equiv |\vec{V}_k|^2 / g h_k^{**} \qquad k = 1, 2 \qquad \beta \equiv \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}$$

若$M_2 \equiv 0$，(7.32)将导致

$$M_1^2 > \frac{\beta}{(1+\beta)} \tag{7.33}$$

但若$M_1 \equiv 0$，(7.32)将导致

$$(1 - \beta) M_2^2 + \beta < 0 \tag{7.34}$$

可见，当$\beta > 0$(稳定层结)，在所有情形[即(7.32)、(7.33)和(7.34)]下不稳定仅在垂直切变超过临界值后才能发生，即为修正的Helmholtz不稳定。此外，混合的 Helmholtz—超临界高速不稳定也可能存在。若$\beta < 0$(不稳定层结)，则当$M_1 = M_2 = 0$时，(7.32)、(7.33)和(7.34)都满足，这正是层结不稳定或即对流不稳定。当$M_2 = 0$，且$-1 < \beta < 0$，不论M_1为何，(7.33)总满足；而当$M_1 = 0$，且$\beta < 0$，则只当M_1^2小于临界值或$|\beta|$大于临界值时，(7.34)才满足，亦即基流速度不为零时，对流不稳定的存在域有所缩小。

(d)混合正压-斜压不稳定和惯性不稳定或对称不稳定在至少有一个$r_{1k} Q''_k (q^*_k)$改变符号或与r_0符号相反时才会发生。

八、斜压原始方程

取静力平衡近似，并使用(θ, λ, ζ, t)坐标系，其中 ζ 是熵，

$$\zeta-\zeta_0=\ln((T/T_0)/(p_0/p)^{R/c_p} \tag{8.1}$$

ζ_0是一常数．我们有如下形式的基本方程

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}-hqv_\lambda=-\frac{\partial K}{a\partial\theta} \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}+hqv_\theta=-\frac{\partial K}{a\sin\theta\partial\lambda} \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla q=0 \tag{8.4}$$

其中

$$h\equiv-\frac{\partial p}{\partial\zeta} \tag{8.5}$$

$$K\equiv c_pT+\varphi+|\vec{v}|^2/2 \tag{8.6}$$

$$q\equiv\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\lambda\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}\right)+2\omega\cos\theta\right\} \tag{8.7}$$

p 是气压，φ 是重力位势，q 是位涡，$\partial/\partial t$、$\partial/\partial\theta$、$\partial/\partial\lambda$是在等熵面上求偏微商。

注意：连续性方程

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\nabla\cdot h\vec{v}=0 \tag{8.8}$$

可以由(8.1)—(8.4)得出。

假设大气处于半径为 a 的球面之上，即不计地形影响；并设大气整体有有限的能量E、广义位涡拟能 F，我们就有 E、F、总角动能M和总质量M都守恒。

为简化计，我们仅研究熵 ζ 随向径 r 单调变化的那些基流和扰动流，并且其下边界还是一个等熵面(其值为ζ_S)，且$\delta\zeta_S=0$。在此情形下，不变泛函 I 和它的变分取简单的形式，泛函 I 定义如下

$$2I=2r_0E+r_1F+2r_2M+r_3Ma \tag{8.9}$$

其中

$$E\equiv\frac{1}{2}\iint_S\int_0^\infty(|\vec{v}|^2+2c_pT)hd\zeta dS \tag{8.10}$$

$$F\equiv\iint_S\int_0^\infty Q(q,\ \zeta)hd\zeta dS \tag{8.11}$$

$$M \equiv \iint_S \int_0^{\infty} a(v_\lambda + a\omega \sin\theta) h d\zeta dS \tag{8.12}$$

$$Ma \equiv \iint_S \int_0^{\infty} h d\zeta dS = \iint_S p_s dS \tag{8.13}$$

为简单计我们在上面诸式中已取了$\zeta_0=0$，但这并不失一般性。它等价于$\zeta=-\ln[(T_s/T_0)(p_0/p_s)^{R/c_p}]$，$p_s$和$T_s$是下底边界的变量。

$\vec{v}$、h和p_s可以取作独立的函数，即由它们可以推出其他函数。其实，p、T、φ可由h和p_s表达如下

$$p(\theta,\lambda,\zeta,t) = p_s(\theta,\lambda,t) - \int_0^{\zeta} h(\theta,\lambda,\zeta',t) d\zeta' \tag{8.14}$$

$$T(\theta,\lambda,\zeta,t) = T_0[p(\theta,\lambda,\zeta,t)/p_0]^{-R/c_p} e^{(\zeta-\zeta_0)} \tag{8.15}$$

$$\varphi(\theta,\lambda,\zeta,t) = \varphi_s(\theta,\lambda,t) - \int_0^{\zeta} RT(\theta,\lambda,\zeta',t) \frac{\partial}{\partial\zeta'}\left(\ln\frac{p}{p_s}\right) d\zeta' \tag{8.16}$$

(见曾庆存，1979)。因此，任给一个扰动$(\delta\vec{v},\ \delta h,\ \delta p_s)$，我们有$p$、$T$、$q$的增量如下

$$\delta p = \delta p_s - \int_0^{\zeta} \delta h d\zeta' \quad (\text{或}\quad \delta h = -\frac{\partial \delta p}{\partial \zeta}) \tag{8.17}$$

$$\delta T = \delta^1 T + \delta^2 T + \cdots\cdots = \delta^1 T + \Delta^2 T \tag{8.18}$$

$$\delta q = \delta^1 q + \delta^2 q + \cdots\cdots = \delta^1 q + \Delta^2 q \tag{8.19}$$

其中

$$c_p \delta^1 T = RT\frac{\delta p}{p} \quad c_p \delta^2 T = -\frac{c_v}{2c_p} RT\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2 \tag{8.20}$$

$$\delta^1 q = \frac{1}{ha\sin\theta}\left(\frac{\partial v_\lambda \sin\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial \delta v_\theta}{\partial\lambda}\right) - q\frac{\delta h}{h} \quad \delta^2 q = -\delta^1 q\left(\frac{\delta h}{h}\right) \tag{8.21}$$

$$c_p \Delta^2 T = -\frac{c_v}{2c_p} RT_*\left(\frac{\delta p}{p_*}\right)^2$$

$$(T_* = p_*^{R/c_p} e^{(\zeta-\zeta_0)} \qquad p_* = p + r_* \delta p \qquad 0 \leqslant r_* \leqslant 1)$$

$$\Delta^2 q = \delta q - \delta^1 q = -\delta q\left(\frac{\delta h}{h}\right) \tag{8.23}$$

从这些公式很容易就得到δI、$\delta^2 I$和$\Delta^2 I$，它们是

$$\begin{aligned} 2\delta I = \iint_S \int_0^{\infty} \Big\{ & \left[2r_0 h v_\theta + r_1 \frac{\partial}{a\sin\theta\partial\lambda}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\right]\delta v_\theta \\ & + \left[2h(r_0 v_\lambda + r_2 a\sin\theta) - r_1 \frac{\partial}{a\partial\theta}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)\right]\delta v_\lambda \\ & + \left[2r_0 K + r_1\left(Q - q\frac{\partial Q}{\partial q}\right) + 2r_2 a\sin\theta(v_\lambda + a\omega\sin\theta) + r_3\right]\delta h \Big\} d\zeta dS \end{aligned} \tag{8.24}$$

$$2\delta^2 I=\iint_S\int_0^\infty h\left\{r_0\left[\delta v_\lambda+\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)\frac{\delta h}{h}\right]^2\right.$$

$$+r_0\left[\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta h}{h}\right]^2-r_0\left[\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)^2+v_\theta^2\right]\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2$$

$$\left.+r_0C^2\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2+r_1\frac{\partial^2 Q}{\partial q^2}[\delta^1 q]^2\right\}d\zeta dS+\iint_S r_0\frac{RT_s}{p_s}[\delta p_s]^2 dS \qquad (8.25)$$

$$2\Delta^2 I=\iint_S\int_0^\infty\left\{r_0\left[h^{**}|\delta\vec{v}|^2+2(\vec{v}\cdot\delta\vec{v})\delta h+c_p\delta^1 T\delta h\right.\right.$$

$$\left.+c_p h^{**}\Delta^2 T\right]+r_1\left[\frac{\partial Q(q,\zeta)}{\partial q}(h\Delta^2 q+\delta q\delta h)\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{h^{**}}{2}\right)\frac{\partial^2 Q(q^*,\zeta)}{\partial q^2}(\delta q)^2\right]+r_2 a\delta h\delta v_\lambda\sin\theta\right\}d\zeta dS$$

$$=\iint_S\int_0^\infty\left\{r_0 h^{**}\left[\delta v_\lambda+\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)\frac{\delta h}{h^{**}}\right]^2\right.$$

$$+r_0 h^{**}\left[\delta v_\theta+v_\theta\frac{\delta h}{h^{**}}\right]^2$$

$$-r_0 h^{**}\left[\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)^2+v_\theta^2\right]\left[\frac{\delta h}{h^{**}}\right]^2+r_0 hC_{**}^2\left[\frac{\delta p}{p}\right]^2$$

$$\left.+r_1 h\frac{\partial^2 Q(q^*,\zeta)}{2\partial q^2}[\delta q]^2\right\}d\zeta dS+\iint_S r_0\frac{RT_s}{p_s}[\delta p_s]^2 dS \qquad (8.26)$$

其中

$$\begin{cases}q^*=q+r^*\delta q & 0\leqslant r^*\leqslant 1\\ h^{**}=h+\delta h\end{cases}$$

$$C^2\equiv R\left(\gamma_a+\frac{\partial T}{\partial r}\right)\frac{RT}{g} \qquad (8.27)$$

$$C_{**}^2\equiv C^2+\frac{c_v}{c_p}\left[\left\{1-\left(\frac{p}{p_*}\right)^{1+c_v/c_p}\right\}RT+RT_*\left(\frac{p}{p_*}\right)^2\frac{\delta h}{h}\right] \qquad (8.28)$$

C 和 C_{**} 具有速度的量纲，即为连续斜压大气的重力波传播速度的特征量。在我们这里的情况下，C 和 C_{**} 必定是正的，因为我们已假定有稳定层结(熵随高度单调增加)，且设 $C_{**}^2-C^2=0(\delta h)$。

推导(8.24)、(8.25)、(8.26)的过程基本上与推导(6.18)、(6.19)、(6.22)的过程相同，但要注意如下诸关系式

$$hd\zeta=-\frac{\partial p}{\partial\zeta}d\zeta=-dp=\rho d\varphi$$

$$\int_0 hc_p\delta^1 T d\zeta=\int_0^\infty \delta p d\varphi=-\int_0^\infty \varphi\frac{\partial\delta p}{\partial\varphi}d\varphi=\int_0^\infty \varphi\delta h d\zeta$$

$$\int_0 c_p\left[\delta^1 T\delta h+h\delta^2 T\right]d\zeta=\frac{RT_s}{2p_s}(\delta p_s)^2+A$$

$$\int_0 c_p\left[\delta^1 T\delta h+h_{\bullet\bullet}\Delta^2 T\right]d\zeta=\frac{RT_s}{2p_s}(\delta p_s)^2+A_{\bullet\bullet}$$

其中 $A\equiv\int_0\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{RT}{p}\right)-\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\frac{RT}{p^2}h\right](\delta p)^2 d\zeta=\int_0\frac{C^2 h}{2p^2}(\delta p)^2 d\zeta$

$$A_{\bullet\bullet}\equiv\int_0\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{RT}{p}\right)-\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\frac{RT_\bullet}{p_\bullet^2}h_{\bullet\bullet}\right](\delta p)^2 d\zeta$$

$$=\int_0\frac{h}{2p^2}C_{\bullet\bullet}^2(\delta p)^2 d\zeta$$

在推导A和$A_{\bullet\bullet}$的过程中用到了

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{RT}{p}\right)-\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\frac{RT}{p^2}h=\frac{R}{p}\left[\frac{\partial T}{\partial\zeta}-\frac{T}{p}\left(1-\frac{c_v}{c_p}\right)\frac{\partial p}{\partial\zeta}\right]$$

$$=\frac{R}{p}\left[\frac{\partial T}{\partial p}-\frac{RT}{c_p p}\right]\frac{\partial p}{\partial\zeta}=\frac{R^2 T}{gp^2}\left[-\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{g}{c_p}\right]\frac{\partial p}{\partial\zeta}=\frac{C^2}{p^2}h$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{RT}{p}\right)-\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\frac{RT_\bullet}{p_\bullet^2}h_{\bullet\bullet}=\frac{C^2}{p^2}h-\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\left[\frac{RT_\bullet}{p_\bullet^2}h_{\bullet\bullet}-\frac{RT}{p^2}h\right]$$

$$=\frac{c^2}{p^2}h-\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\frac{RTh}{p^2}\left[\frac{T_\bullet}{T}\left(\frac{p}{p_\bullet}\right)^2\left(1+\frac{\delta h}{h}\right)-1\right]$$

且对每一个等熵面我们有

$$\frac{T_\bullet}{T}=\left(\frac{p_\bullet}{p}\right)^{R/c_p}$$

定理8.1 满足斜压原始方程组(8.2)—(8.4)及满足(1)底边界的熵为一给定的常数，(2)每一等熵面包围地球这两附加条件的每一行波解对应于泛函 I 在具有满足上述条件的子集空间($\vec{v}$, h, p_s)中的驻点，并且它由如下方程组确定

$$\begin{cases}2(r_0 v_\lambda+r_2 a\sin\theta)h-r_1\dfrac{\partial}{a\partial\theta}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)=0\\ 2r_0 v_\theta h+r_1\dfrac{\partial}{a\sin\theta\partial\lambda}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)=0\\ 2r_0 K+r_1\left(Q-q\dfrac{\partial Q}{\partial q}\right)+2r_2 a\sin\theta(v_\lambda+a\omega\sin\theta)+r_3=0\end{cases}\tag{8.29}$$

其相角速为$\dot{\lambda}_0=-r_2/r_0$，这里Q是q和ζ的任意函数，r_0、r_1、r_2和r_3是一些参量。

定理8.1的证明，基本上同定理6.1的证明。

然而从(8.25)或(8.26)去寻找稳定性的充分条件却是困难的。事实上，设若$r_0>0$，则(8.25)和(8.26)中带有$(\delta h/h)^2$(或$\delta h/h^{**})^2$的项是负的，而带有r的其他项是正的。因而，当$[v_\lambda+(r_2/r_0)a\sin\theta]^2+v_\theta^2\neq 0$时，$r_1\partial^2Q(q,\zeta)/\partial q^2$或$r_1\partial^2Q(q,\zeta)/\partial q^2$也是正的，不能保证$\delta^2I$或$\Delta^2I$是正定的。其实，按照普适的积分不等式，总可找到具有足够小垂直尺度的函数δp，使得

$$\int_0^\infty(\delta h)^2d\zeta\gg\int_0^\infty(\delta p)^2d\zeta \tag{8.30}$$

从而使(8.25)右边含$(\delta h)^2$和$(\delta p)^2$的两项之和是负的。下面就是这样的一些例子。其一是$\delta p=(\delta p_s)\exp(-n\zeta)$，由此可得

$$\int_0^\infty(\delta h)^2d\zeta=n^2\int_0^\infty(\delta p)^2d\zeta$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty(\delta h)^2d\zeta\to\infty$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty(\delta p)^2d\zeta=0$$

另一个例子是$\delta p=(\delta p_s)\exp(-\zeta)\sin m\zeta$，我们有

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty(\delta p)^2d\zeta=\frac{1}{4}(\delta p_s)^2$$

但

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty(\delta h)^2d\zeta\to\infty$$

上述的分析表明我们不能确定$\|\delta\vec{v}\|_3^2$、$\|\delta h/h\|_3^2$、$\|\delta p_z/p\|_3^2$、$\|\delta p_s\|^2$和$\|(\partial^2Q/\partial q^2)^{1/2}\delta q\|_3^2$有上界，因此稳定性得不到保证。

在斜压大气中，我们仍然可以对不稳定性加以分类。除了以$\partial\zeta/\partial z<0$(或$C^2<0$)为特征的对流不稳定(它在本节中被我们的假设排除了)之外，我们有(a)混合正压-斜压不稳定，其特征是$\partial^2Q(q^*,\zeta)/\partial q^2$在某些区域内为负；(b)惯性不稳定和对称不稳定，它在条件$\partial^2Q(q^*,\zeta)/\partial q^2<0$和其它一些附加条件下可能发生；(c)Helmholtz不稳定和(d)超临界高速不稳定，此二者均可能发生，如果在一些区域和某些时刻有

$$\int_0^\infty\left\{hC_{**}^2\left(\frac{\delta p}{p}\right)^2-h^{**}\left[\left(v_\lambda+\frac{r_2}{r_0}a\sin\theta\right)^2+v_\theta^2\right]\left(\frac{\delta h}{h^{**}}\right)^2\right\}d\zeta<0 \tag{8.31}$$

粗略地说，当运动中含有足够小的垂直波长的重力-惯性波时(8.31)总是满足的，因为

其特征相速度比C小得多，因而基流的$[(V_\lambda+r_2 a\sin\theta/r_0)^2+V_0^2]^{1/2}$很易超过它。可见，在连续的斜压大气中，基流为稳定的仅当加于其上的扰动在垂直方向上的结构在任何时刻都是简单的。否则，Helmholtz不稳定可能迟早要发生，于是稳定性可能遭到破坏。

关于斜压大气中流动的稳定性问题，需要作进一步的研究。

九、β-平面模式

应用变分法的关键在于寻求由积分组成的不变泛函，因而，在流体占据着无限空间而沿全流体的积分又无界的情形下，变分方法需要作修改。这里我们将以β平面上二维不可压流体作为例子进行阐明。

1.周期性通道

在β-平面上二维不可压流体的基本方程是绝对位涡守恒，即

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla q=0 \qquad (A.1.1)$$

其中，$\vec{V}=\vec{K}\times\nabla\psi\equiv\vec{i}U+\vec{i}V$。$\psi$是流函数，

$$q=\Delta\psi+f \qquad (A.1.2)$$

$$f=f_0+\beta y \qquad (A.1.3)$$

β取为常数，f_0是另一个常数。流体力学中常见的经典模式就是对应于没有科氏力的情况，即$f_0=\beta_0=0$。

取通道平行于x轴，$y_1<y<y_2$；在$y=y_1$和y_2上有刚壁边界。设基流ψ和扰动$\delta\psi$沿x轴都是周期函数，周期为2L。此时，我们有总动量M，总动能E和总的广义涡度拟能F守恒；此外，还有在边界y_1和y_2上的总的沿x轴动量B_1和B_2也守恒，其中

$$M\equiv\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\left[u+\int_{y}^{y_3}f(y')dy'\right]dy\,dx \qquad (A.1.4)$$

$$E\equiv\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{2}(u^2+v^2)dy\,dx \qquad (A.1.5)$$

$$F\equiv\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}Q(q)dy\,dx \qquad (A.1.6)$$

$$B_1\equiv\int_{-L}^{L}u(x,y_1,t)dx \qquad (A.1.7)$$

$$B_2\equiv\int_{-L}^{L}u(x,y_2,t)dx \qquad (A.1.8)$$

且$y_3>y_2$为某一参考坐标点，Q是自变量q的任意函数。因而我们有不变泛函$I(\psi)$ $(dI/dt=0)$ 如下

$$I(\psi)\equiv 2r_0E+r_1F+r_2M+r_3B_1+r_4B_2 \tag{A.1.9}$$

它依赖于任意函数Q和某些参变量r_0、r_1和r_2、r_3、r_4。这些参量中一些是任意的，一些可用后面的方法确定。

给定一个扰动$\delta\psi$，在经过一些基本运算后可以得到一阶和二阶变分δI和$\delta^2 I$以及$I(\psi+\delta\psi)$和$I(\psi)$之差如下

$$\delta I=\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\left\{-2r_0\psi+r_1Q'(q)+r_2y\right\}\delta q\,dy\,dx$$

$$+\int_{-L}^{L}\left\{(2r_0\psi-r_2y_2+r_4)\frac{\partial\delta\psi}{\partial y}\right\}_{y=y_2}dx$$

$$+\int_{-L}^{L}\left\{(-2r_0\psi+r_2y_1+r_3)\frac{\partial\delta\psi}{\partial y}\right\}_{y=y_1}dx \tag{A.1.10}$$

$$\delta^2 I=\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\left\{r_0|\delta\vec{v}|^2+\frac{r_1}{2}Q''(q)(\delta q)^2\right\}dy\,dx \tag{A.1.11}$$

$$\Delta^2 I=\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\left\{r_0|\delta\vec{v}|^2+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}dy\,dx \tag{A.1.12}$$

$$(q^*=q+r^*\delta q\quad 0\leqslant r^*\leqslant 1)$$

$$I(\psi+\delta\psi)-I(\psi)=\delta I+\Delta^2 I \tag{A.1.13}$$

我们总可取ψ在$y=y_1$处等于一给定的常数ψ_1，并且能够证明ψ在$y=y_2$处等于另一个不依赖于t的常数ψ_2。今取

$$\begin{cases} r_3=2r_0\psi_1-r_2y_1 \\ r_4=-2r_0\psi_2+r_2y_2 \end{cases} \tag{A.1.14}$$

于是(9.1.10)中后两个积分为零，因而δI可以简单地由一个二重积分表示。我们有

定理9.1　在β平面$y_1\leqslant y\leqslant y_2$的通道中，二维不可压流体的每一个平行流$\psi(y)$或行波$\psi(x-ct,\ y)$是在空间$\psi$中泛函I的驻点，即$\delta I=0$，其中$r_3$、$r_4$由(9.1.14)确定，而且相速$C=-r_2/2r_0$。逆定理亦真。

定理9.2　由函数Q和参量r_0、r_1和r_2通过$\delta I=0$而确定的流动$\psi(x-ct,y)$，对每一个与它有同样的x-周期的扰动$\delta\psi$而言，如果δI是定号函数(即r_0和$\frac{r_1}{2}Q''$在通道内各处同时为非负或非正)，那么它是稳定的。

定理9.3　基流$\psi(x-ct,\ y)$可能是不稳定，如果$(r_1Q''(q))/2$在通道内是一个非定号函数或它的符号与r_0相反。

上面所述的方法和理论基本上与球面情形相同，因而略去这些定理的证明。注意，平行流$\psi(y)$是$\psi(x-ct,\ y)$的特殊类，因而它已自动地被包含在定理9.2和9.3中的基流之列，而没有特别标出。

2. 无限通道但$\delta\vec{v}$和$\delta q\in L_2$

如果流动沿x方向不是周期性的，即$L\to\infty$，则由(9.19)定义的泛函I一般是无界的，因而前几节的方法不能直接应用，需要加以适当的修改。

定理9.4 每一在β平面上处于$y_1\leqslant y\leqslant y_2$通道内的二维不可压液体的平行流或行波，$\psi(x-ct,\ y)$满足如下方程及边条件

$$-2r_0\psi+r_1Q'(q)+r_2y=0 \tag{A.2.1}$$

$$\begin{cases}\psi=\dfrac{1}{2r_0}(r_2y_1+r_3) & y=y_1\\[2ex] \psi=\dfrac{1}{2r_0}(r_2y_2-r_4) & y=y_2\end{cases} \tag{A.2.2}$$

其中Q是任意函数，$r_s(s=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$是一些参变量。逆定理亦真。

定理9.4可以直接通过微积分运算来证明。注意，定理9.1和定理9.4其实是一样的。其实，如在定理9.1的陈述中把关于I和$\delta I=0$的字句改用其相应的方程[即(9.2.1)]和边界条件[即(9.2.2)]来表达时，定理(9.1)即和定理(9.4)完全相同，因而定理(9.4)可以包括更广的类型。

下面讨论流动的稳定性问题。取平行流或行波作为基流，仍按(9.19)构造泛函I(且L仍先取为有限)，我们有(9.1.12)和(9.1.13)，但δI变为

$$\delta I=\int_{y_1}^{y_2}\Big(\Big[2r_0\psi-r_2y\Big]\delta v\Big)\Big|_{x=-L}^{x=L}dy \tag{A.2.3}$$

因而我们有

$$\Delta\equiv I(\psi+\delta\psi)-I(\psi)=\int_{y_1}^{y_2}\Big(\Big[2r_0\psi-r_2y\Big]\delta v\Big)\Big|_{x=-L}^{x=L}dy$$

$$+\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\Big\{r_0|\delta\vec{v}|^2+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\Big\}dydx=\Delta_1+\Delta_2 \tag{A.2.4}$$

此外，由方程(9.1.1)和其等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-\nabla\varphi+\vec{k}\times f\vec{v}\\[2ex] \nabla\cdot\vec{v}=0\end{cases} \tag{A.2.5}$$

我们可以算出dF/dt、dE/dt等等，最后就得到

$$\frac{dI}{dt}=-\int_{y_1}^{y_2}\Big\{2r_0uK+r_1uQ+r_2u\Big(u+\int_y^{y_3}f(y')dy'\Big)+r_2\varphi\Big\}\Big|_{x=-L}^{x=L}dy$$

$$-r_3\Big[\Big(\varphi-\frac{u^2}{2}\Big)_{y=y_1}\Big]\Big|_{x=-L}^{x=L}-r_4\Big[\Big(\varphi-\frac{u^2}{2}\Big)_{y=y_2}\Big]\Big|_{x=-L}^{x=L} \tag{A.2.6}$$

此处$K=\varphi+|\vec{v}|^2/2$，φ是由ψ从求解所谓的平衡方程来确定。

今设在整个无限通道内给出了 $|\delta v|$ 和 δq，且都属于 L，在此情形下，我们取 $L\to\infty$，并用 $\widetilde{\Delta}$ 记 Δ 的极限，我们有：

$$\widetilde{\Delta}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y_1}^{y_2}\left\{-r_0|\delta\vec{v}|^2+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}dy\,dx=\lim_{L\to\infty}\Delta_2 \qquad (A.2.7)$$

并且我们能够证明

$$\frac{d\widetilde{\Delta}}{dt}=\lim_{L\to}\frac{d\Delta}{dt}=0 \qquad (A.2.8)$$

因而，定理9.2和9.3在 ΔI 由 Δ 代替后仍有效。因为此时 Δ 是 $\delta\psi$ 的二次泛函，并且是不变量，尽管当 $L\to\infty$ 时 I 并不存在。

3. 无限通道的一般情况

在 $\widetilde{\Delta}$ 不存在时，我们定义

$$e\equiv\frac{\Delta}{S}\qquad (S\equiv\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}dy\,dx \qquad (A.3.1)$$

不难证明下列极限存在

$$\widetilde{e}\equiv\lim_{L\to\infty}e=\lim_{L\to}\frac{1}{S}\int_{-L}^{L}\int_{y_1}^{y_2}\left\{r_0|\delta\vec{v}|^2+\frac{r_1}{2}Q''(q^*)(\delta q)^2\right\}dy\,dx \qquad (A.3.2)$$

$$\frac{d\widetilde{e}}{dt}=\lim_{L\to\infty}\frac{de}{dt}=\lim_{L\to\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta_2}{S}\right)=0 \qquad (A.3.3)$$

现在，我们给出稳定性定义的推广。

定义　若对所有扰动均能定义出范数 $\|\delta\psi\|_w$，并且它有界，相对于小扰动流是稳定的。

注意，所谓某空间的范数，是指对其任一元素来说它都是正数，只当取零元素时它为零，按此推广了的定义，在周期通道中如果 ΔI 为正定(为方便计，以后我们总设 $r_0\geqslant 0$)，可取 $\|\delta\psi\|=\Delta I$，在无限通道中若 $\widetilde{\Delta}$ 有限且正定，可取 $\|\delta\psi\|_W^2=\widetilde{\Delta}$；如若 Δ 不为有限，但为正定，则取

$$\|\delta\psi\|_W^2=\lim_{L\to\infty}\left|\frac{\Delta_2}{S}\right| \qquad (A.3.4)$$

因而，对周期或无限通道以及其它所有情形，我们有如下定理。

定理9.5　定理9.4中描述的基流是相对于小扰动为稳定的，如果 r_0 和 $r_1Q''(q)$ 在流体任何处有同样的符号。

定理9.6　定理9.4中描述的基流为不稳定的必要条件是 r_0 和 $r_1Q''(q)$ 有相反符号或 $Q''(q)$ 在流体内改变符号。

参考文献

Arnold, V.I. (1965). Conditions for nonlinear stability of stationary plane curvilinear flows of an ideal fluid. Doklady Akademia Nauk USSR, 162: 975—978.

Blumen, W. (1968). On the stability of quasi—geostrophic flow, J. Atmos. Sci. 25: 929—931.

Blumen, W. (1970). Shear layer instability of an inviscid compressible fluid, J. Fluid Mech., 40: part 4, 769—781.

Blumen, W. (1978), A note on horizontal boundary conditions and stability of quasi—geostrophic flow, J. Atmos. Sci. 35: 1314—1318.

Dikii, L.A. (1965). On the nonlinear theory of the stability of zonal flows, Bulletin Acad. Sci. USSR. Atmos. Ocean. Phys., 1: 653—655.

Hoskins, B.J. (1973), Stability of the Rossby—Haurwitz wave, Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 99: 723—745.

Lin, C.C. (1953), On the stability of the laminar mixing region between two parallel streams in a gas, NASA TN No. 2887.

Lin, C.C. (1955), The theory of hydrodynamic stability, Cambridge, Cambridge University Press, p. 155.

Lin, C.C. and Benney D.J. (1962), On the instability of shear flow, Proc. Symp. Appl Math. 13, Rhode Island, Amer. Math. Soc.

Satomura, T. (1981), An investigation of shear instability in a shallow water, J. Meteor. Soc. Japan, 59: No. 1, 148—167.

Satomura, T. (1981), Supplementary note on shear instability in a shallow water, J. Meteor. Soc. Japan, 59: No. 1, 168—171.

Zeng Qingcun (1979), The physical—mathematical basis of numerical weather prediction, Vol. 1, Beijing, Science Press (in Chinese), 543pp.

Zeng Qingcun (1983). The development characteristics of quasi—geostrophic baroclinic disturbances, Tellus, 35A, No. 5, 337—349.

Zeng Qingcun (1986), Nongeostrophic instability, Scientia Sinica, Series B, 29: No. 5, 535—542.

Zeng Qingcun, Yuan Chongguang, Zhang Xuehong and Bao Ning (1985), A test for the difference scheme of a general circulation model, Acta Meteorologica Sinica, 43: 441—449.

VARIATIONAL PRINCIPLE OF INSTABILITY OF ATMOSPHERIC MOTIONS

Zeng Qingcun

ABSTRACT

Problems of instability of rotating atmospheric motions are investigated by using nonlinear governing equations and the variational principle. The method suggested in this paper is universal for obtaining criteria of instability in all models with all possible basic flows. For example, the model can be barotropic or baroclinic, layer or continuous, quasi-geostrophic or primitive equations, the basic flow can be zonal or nonzonal, steady or unsteady. Although the basic flows possess a great deal of variety, they all are the stationary points in the functional space determined by an appropriate invariant functional. The basic flow is an unsteady one if the conservation of angular momentum is included in the associated functional. The second variation, linear or nonlinear, gives the criteria of instability. Especially, the general criteria of instability for unsteady basic flow, orographically disturbed flow as well as non-geostrophic flow are first obtained by the method described in this paper. It is also shown that the difference between the criteria of instability obtained by the linear theory and our variational principle clearly indicates the importance of using nonlinear governing equations. In the appendix the theory is extended to cases such as in a β-plane where the fluid does not possess finite total energy, hence the variational principle can not be directly applied. However, a generalized Liapounoff norm can still be obtained on the basis of variational consideration.