第13卷 第3期　南京气象学院学报　Vol.13, No.3
1990年9月　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　Sep., 1990

垂直分辨率与水平分辨率协调问题的研究*

陆维松

提　要

本文从二维线性平流方程出发(二维是x方向和p方向)，其垂直和水平的空间导数均取中央差，按差分方程中垂直分辨率引起的截断误差和水平分辨率引起的截断误差相等的原则，导得了平流方程的中央差格式中垂直分辨率和水平分辨率协调的关系式，并对此关系式作了详细讨论，对我国中期数值天气预报模式垂直层次和水平格距的确定有一定的指导意义。

一、引　言

在世界各国的数值天气预报模式中，垂直分辨率与水平分辨率的选取往往是相互独立的。这样，对于同样的计算精度(即截断误差)，其中一种分辨率可能偏细，从而浪费了许多计算量，既增加了计算机时，又减少了预报时效。这是由于这两种分辨率处在同一个预报方程组之中，预报方程组的总截断误差主要由这两种分辨率分别引起的两种截断误差之和所决定，但这两种截断误差一般互不相等且量级相差较大，分辨率较粗的，计算量较小，截断误差量级较大，决定了总截断误差的大小；而分辨率较细的，计算量较大，截断误差量级较小，对总截断误差几乎没有贡献。在保证同样计算精度的情况下，这两种分辨率怎样选取最佳，亦即使得计算量达到最小？廖洞贤等(1982, 1986)曾从计算稳定性及连续方程导得了这两种分辨率的近似关系[1,2]。Bengtsson(1975)在介绍欧洲中心预报系统时曾认为，在水平面上能够分辨得出的现象在垂直面上也该能分辨得出来[3]，由此确定这两种分辨率之间的协调关系。但没有从既保证计算精度，又使得计算量最小来考虑这两种分辨率的协调关系。迄今为止对上述问题几乎没有专门的研究报道。鉴于我国的具体国情，中期数值天气预报模式迫切需要精度较好而计算量较小的计算方案。本文从二维平流方程出发，按照这两种截断误差大小相等的原则确定垂直分辨率与水平分辨率之间的协调关系式。

1989年1月18日收到，4月5日收到修改稿

* 本文由国家“七五”攻关项目“中期数值天气预报课题”资助

二、垂直分层与水平格距的协调关系

考虑二维线性平流方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial A}{\partial x}+\overline{\omega}\frac{\partial A}{\partial y}=0 \tag{1}$$

式中$\overline{u}$、$\overline{\omega}$均为常数，A 为任一物理量。令

$$A=\widehat{A}\exp\{I(kx+mp-\sigma t)\} \tag{2}$$

(2)式代入(1)式，得

$$\frac{\partial A}{\partial t}=-I(k\overline{u}+m\overline{\omega})A \tag{3}$$

式中$I=\sqrt{-1}$。为研究垂直分层与水平格距的关系，将(1)式中左端第二、三项写为中央差形式，即

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\overline{u}}{2\Delta x}(A_{i+1,j}-A_{i-1,j})+\frac{\overline{\omega}}{2\Delta p}(A_{i,j+1}-A_{i,j-1})=0 \tag{4}$$

式中$i=1, 2, \cdots\cdots$表示x方向的格点数；$j=1, 2, \cdots\cdots$，J表示垂直分层数，Δx、Δp分别表示x方向的格距，p方向的垂直分层厚度。同样，令

$$A_{i,j}=\widehat{A}\exp\{I(kx_i+mp_j-\sigma t)\} \tag{5}$$

式中$x_i=i\Delta x$，$p_j=j\Delta p$。(5)式代入(4)式，得

$$\frac{\partial A}{\partial t}+I\left\{\frac{\overline{u}}{\Delta x}\sin k\Delta x+\frac{\overline{\omega}}{\Delta p}\sin m\Delta p\right\}A_{i,j}=0 \tag{6}$$

按截断误差的定义，(3)-(6)，得

$$\overline{u}\left(k-\frac{\sin k\Delta x}{\Delta x}\right)+\overline{\omega}\left(m-\frac{\sin m\Delta p}{\Delta p}\right)=0 \tag{7}$$

(7)式左端第一、二项分别为水平分辨率和垂直分辨率所引起的截断误差。由于确定Δp与Δx的关系仅考虑这两种截断误差绝对值相等而与这两者的正负无关，将(7)式的左端第二项移到方程右面，然后方程两边取绝对值，得

$$\left|\overline{u}\left(k-\frac{\sin k\Delta x}{\Delta x}\right)\right|=\left|\overline{\omega}\left(m-\frac{\sin m\Delta p}{\Delta p}\right)\right| \tag{7'}$$

或

$$\Delta p=\Delta x\left|\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\right|\left(\frac{2\pi\Delta p}{L_p}-\sin\frac{2\pi\Delta p}{L_p}\right)\Big/\left(\frac{2\pi\Delta x}{L_x}-\sin\frac{2\pi\Delta x}{L_x}\right) \tag{8}$$

式中已利用了$k=2\pi/L_x$，$m=2\pi/L_p$，L_x、L_p分别为x、p方向的波长。由此可见，当

(8)式满足，则(7′)式成立，从而对由(1)式作差分近似后的(6)式，其由水平分辨率引起的误差$\overline{u}(k-\sin k\Delta x/\Delta x)$的绝对值与由垂直分辨率引起的误差$\overline{\omega}(m-\sin m\Delta p/\Delta p)$的绝对值相等。因此，(8)式即所要求的垂直分辨率与水平分辨率的协调关系式。这是一个关于Δp、Δx的非线性关系式。但当$(2\pi\Delta p/L_p,\ 2\pi\Delta x/L_x)\leqslant 1$时，(8)式中的正弦函数可作泰勒展开，将5阶以上的高阶小量略去，则由(8)式得

$$\Delta p=\left(\left|\frac{\overline{u}}{\overline{\omega}}\right|\frac{L_p^3}{L_x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta x \tag{9}$$

Δp与Δx成线性关系。注意(8)、(9)两式的两端都取其绝对值。

另一方面，将(4)式中$A_{i+1,j}$、$A_{i-1,j}$、$A_{i,j+1}^n$、$A_{i,j-1}$作泰勒展开，代入(4)式得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial A}{\partial x}+\overline{\omega}\frac{\partial A}{\partial p}\right)+\left\{\left[\frac{\overline{u}\,\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}+\frac{\overline{\omega}\,\Delta p^2}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial p^3}\right]+O(\Delta x^4,\Delta p^4)\right\}=0 \tag{10}$$

将(10)式与(1)式比较，其截断误差为

$$T=\frac{\overline{u}\,\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}+\frac{\overline{\omega}\,\Delta p^2}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial p^3} \tag{11}$$

上式略去了(10)式中高阶截断误差$O(\Delta x^4,\Delta p^4)$。若(11)式中水平截断误差与垂直截断误差量级相同，则(11)式右端两项绝对值相等，即

$$\Delta p=\left[\left|\frac{\overline{u}}{\overline{\omega}}\right|\frac{\partial^3 A}{\partial p^3}\Big/\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right]^{\frac{1}{2}}\Delta x \tag{12}$$

(2)式代入上式，得

$$\Delta p=\left(\left|\frac{\overline{u}}{\overline{\omega}}\right|\frac{L_p^3}{L_x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta x \tag{13}$$

值得注意的是，(13)式与(9)式完全相同。显然，略去高阶截断误差所得水平截断误差与垂直截断误差的近似平衡式，也是准确平衡式(8)式的近似式。有意义的是，(9)、(13)两式也与文献[1]中的(7.71)式等价。

对于Δp或Δx较大，以及L_x或L_p较小时，采用(8)式较好，而采用(9)式可能有较大的误差。由于(8)式对各种情况普遍适用，一般采用(8)式确定Δp与Δx的关系，为了便于计算，(8)式化为

$$a_2\Delta p=\sin\frac{2\pi\Delta p}{L_p} \tag{14}$$

式中 $a_1=\dfrac{2\pi\Delta x}{L_x}-\sin\dfrac{2\pi\Delta x}{L_x}$， $a_2=\dfrac{2\pi}{L_p}-\dfrac{|\overline{u}|a_1}{|\overline{\omega}|\Delta x}$ (15)

(14)式为Δp的超越方程。当给定$\overline{u}$、$\overline{\omega}$、L_x、L_p、Δx时，可由(14)式迭代求得Δp。从

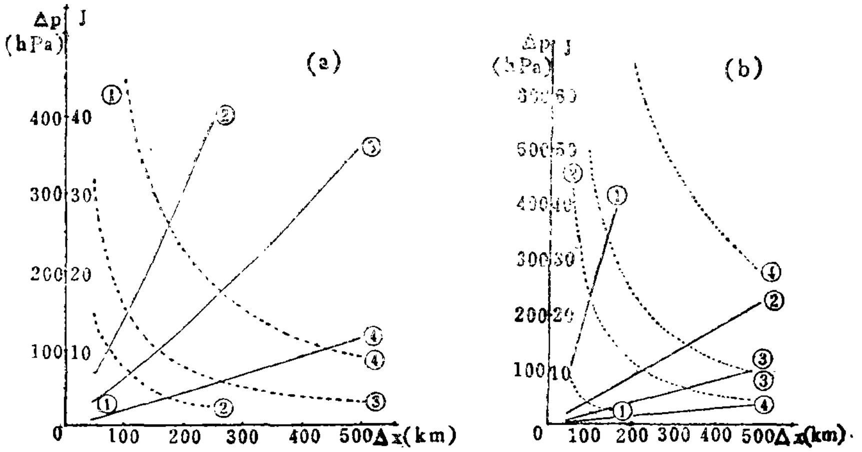
而确定Δp与Δx的关系。由(14)式可确定Δp上、下限。因 $0 \leqslant \left| \sin\frac{2\pi\Delta p}{L_p} \right| \leqslant 1$，则

$$0 \leqslant \Delta p \leqslant \frac{1}{|a_2|} = (\Delta p)_{max} \tag{16}$$

显然，$(\Delta p)_{max}=1/|a_2|$ 为Δp的上限，它与L_x、L_p、$|\overline{u}|/|\overline{\omega}|$、$\Delta x$等有关，若取$L_x=10^6 m$，$L_p=500 hPa$，$|\overline{u}|/|\overline{\omega}|=1\times10^4 m/hPa$，$\Delta x=2\times10^6 m$，则$(\Delta p)_{max}\doteq 91 hPa$，从而对应的层次至少取11层左右。

利用电子计算机，对(14)式作迭代运算，其计算结果绘为图1、2、3、4。

由图1(a)可见，当$L_p=1\,000 hPa$，$|\overline{u}|/|\overline{\omega}|=5\times10^4 m/hPa$时，后者对应$\overline{u}=50\ m/s$，$\overline{\omega}=0.001\ hPa/s$，或$\overline{u}=100 m/s$，$\overline{\omega}=0.002 hPa/s$等，$\Delta p(\Delta x)$所对应的实线由$L_x=3\,000 km$ 到 $L_x=10\,000\ km$，其与 x 轴的夹角越来越小，实线由稍微弯曲变成直线，而$J(\Delta x)$所对应的虚线由$L_x=3\,000 km$到$L_x=10\,000 km$也相应从原点附近逐渐远离，并且虚线都为双曲线，实、虚线相互近似正交。Δp随着Δx增加而单调增加，且随着 x 方向波长L_x增大，Δp随Δx增加而增加得越快。反之，垂直层数J随着Δx增加而单调减小，且随着 L_x 增大，J随着 Δx 增加而减小得越快。如取$\Delta x=200 km$，对于波长$L_x=3\,000 km$，$5\,000 km$，$10\,000 km$，分别有 $J\doteq3$，8，22。因此，对于 4—8 天的中

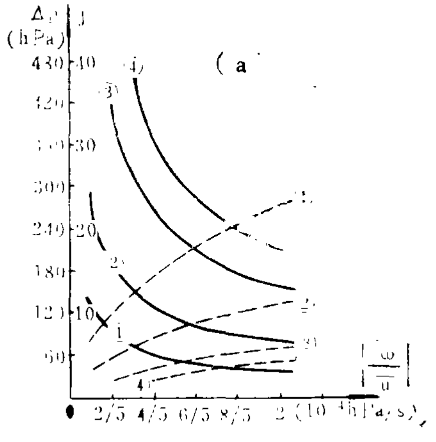


(a) $\left|\frac{\overline{u}}{\overline{\omega}}\right|=5\times10^4 m/hPa$　　(b) $\left|\frac{\overline{u}}{\overline{\omega}}\right|=5\times10^3 m/hPa$

图1　Δp与Δx，J与Δx的关系。$L_p=1\,000 hPa$。①$L_x=1\,000 km$，②$L_x=3\,000 km$，③$L_x=5\,000 km$，④$L_x=10\,000 km$。实线表示$\Delta p(\Delta x)$，虚线表示$J(\Delta x)$，J为垂直分层数

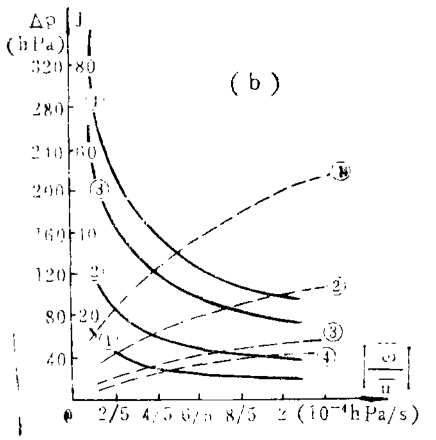
期天气预报，主要考虑波长$L_x\geqslant3\,000$—$5\,000 km$的行星波，故取垂直分层数 $J\doteq12$—15层。而对1—3天的短期天气预报，主要考虑波长$L_x=3\,000$—$5\,000 km$的斜压波动，故取垂直分层数$J\doteq5$—6 层。如取$\Delta x=381 km$，$L_x=3\,000 km$、$5\,000 km$，分别对应$J\doteq1$、4层，故取 $J\doteq3$ 层就可以了。而$L_x=10\,000 km$取 $J\doteq12$层，故作中期预报取 $J\doteq$

5—8层即可．对于 $L_x=1\,000$km，在图中只有两个孤立点，上面是$\Delta p(\Delta x)$，下面是 $J(\Delta x)$。在图1(b)中，$\overline{u}/\overline{\omega}=5\times10^3$m/hPa与(a)相差一个量级，对应$\overline{u}=50$m/s，$\overline{\omega}=10^{-2}$hPa/s，或$\overline{u}=100$ m/s，$\overline{\omega}=2\times10^{-2}$hPa/s等。即垂直速度增加了一个量级。(b)中实、虚线情况与(a)类似，但具体数值不相同。如取$\Delta x=200$ km，对于$L_x=$ 3 000、5 000、10 000km，分别对应 $J\doteq11$、25、66。显然，此处J比(a)中J大大增加了。类似上面讨论，对于波长$L_x=3\,000$—5 000km，取垂直分层数$J\doteq18$，作短期预报；而对于$L_x\geqslant3\,000$—5 000km，取垂直分层数$J\doteq34$，作中期预报。若取$\Delta x=381$km，对于$L_x=$ 3 000，5 000，10 000km，对应$J\doteq6$、13、37。则对$L_x=3\,000$—5 000km，取$J\doteq9$—10；对$L_x\geqslant3\,000$—5 000km，取$J\doteq22$。由图1(a)、(b)可见，对于给定的Δx，波长越长的波需要越多的层次J。对于中期天气预报而言，主要系统是波长$L_x\geqslant3\,000$—5 000km的行星波，其垂直运动不太强，$\overline{\omega}$较小，故其垂直分层的确定似乎采用图1(a)结果较好。而对于短期天气预报，斜压波动的垂直运动较强，$\overline{\omega}$较大，似乎可考虑图1(b)中所确定的垂直分层J。另外，(a)中$\Delta x=100$、500km，对$L_x=3\,000$、5 000、10 000 km，分别对应$J\doteq7$、16、45，和$J\doteq1$、3、9。(b)中$\Delta x=100$、500 km，对$L_x=3\,000$、5 000、10 000km，分别对应$J\doteq4$、23、50，和$J=5$、10、28。也可类似作讨论。如(a)中$\Delta x=100$km，$L_x\geqslant3\,000$—5 000 km，$J\doteq26$—32。

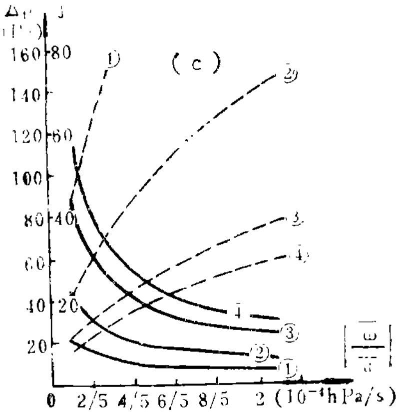


(a)　$L_x=3\,000$km

由图2可见，在(b)中，$L_x=5\,000$km，



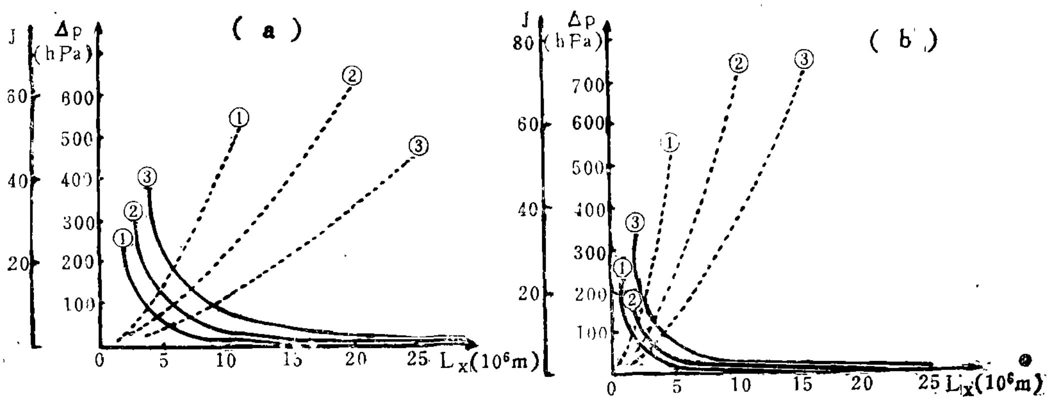
(b)　$L_x=5\,000$km



(c)　$L_x=10\,000$km

图2　Δp与$|\overline{\omega}/\overline{u}|$的关系。$L_p=1\,000$hPa。①$\Delta x=100$km，②$\Delta x=200$km，③$\Delta x=381$km，④$\Delta x=500$km。实线为$\Delta p(|\overline{\omega}/\overline{u}|)$，虚线为$J(|\overline{\omega}/\overline{u}|)$

$L_p=1\,000$hPa，Δp随着$\overline{\omega}/\overline{u}$的增加而单调减少，且随着$\Delta x$的增大，$\Delta p$随着$\overline{\omega}/\overline{u}$的增加而减小越快。反之，J随着$\overline{\omega}/\overline{u}$的增加而单调增加，且随$\Delta x$的增大，J随$\overline{\omega}/\overline{u}$的增加而增加加快。当$\Delta x=100$，200，381，500km时，在$\frac{1}{5}\leqslant\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\times10^4\leqslant2$(hPa/m)区间内，分别对应$15\leqslant J\leqslant50$，$7\leqslant J\leqslant25$，$4\leqslant J\leqslant13$，$3\leqslant J\leqslant10$。$\Delta x$越小，需要的垂直分层J越大，反之亦然。可与前面图1结果比较，当$\overline{u}=100$m/s，$\overline{\omega}=0.01$ hPa/s时，$\Delta x=381$km对应$J\doteq9$；而当$\overline{u}=50$ m/s，$\overline{\omega}=0.01$hPa/s时，$\Delta x=381$ km对应$J\doteq13$。显然前者比后者小得多。在(a)、(c)中，Δp随着$\overline{\omega}/\overline{u}$的变化趋势与(b)相类似。在(a)中，$L_x=3\,000$km，$L_p$不变，在$\frac{1}{5}\leqslant\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\times10^4\leqslant2$(hPa/m)区间内，$\Delta x=100$，200，381，500km，分别对应$7\leqslant J\leqslant23$，$3\leqslant J\leqslant12$，$1\leqslant J\leqslant6$，$1\leqslant J\leqslant5$。如当$\overline{u}=100$ m/s，$\overline{\omega}=0.01$hPa/s时，$\Delta x=381$ km对应$J\doteq4$。与(b)中结果相比，可见，$\overline{u}=100$ m/s，$\overline{\omega}=0.01$hPa/s，$\Delta x=381$km，对于$L_x=3\,000$、$5\,000$ km，其垂直分层数取为$J\doteq6$—7层较好。与图1(b)中所得对$\overline{u}=50$m/s，$\overline{\omega}=0.01$ hPa/s，其它都相同时所得$J\doteq9$—10相比，显然，要小了许多，且此处的$\overline{u}$、$\overline{\omega}$取法对短期过程较为合理，因此，若$\Delta x=381$ km，作短期预报，拟取$J\doteq6$—7层为好。这比我国B模式分层数略多1—2层。5层B模式的垂直和水平分辨率所引起的截断误差对于较强的垂

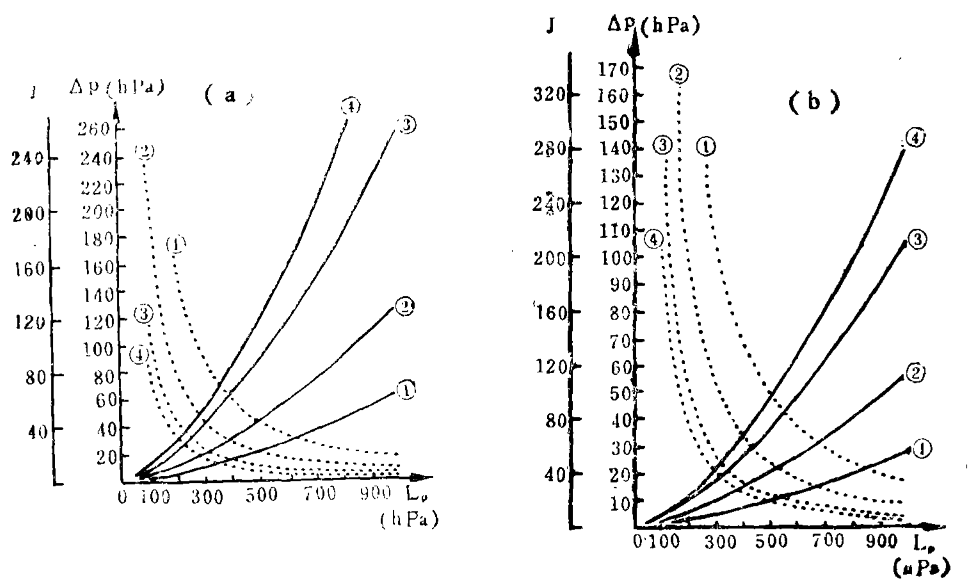


(a)　$\left|\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\right|=\frac{1}{5}\times10^{-4}$hPa/s　　　　(b)　$\left|\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\right|=\frac{1}{5}\times10^{-3}$hPa/s

图3　Δp与L_x的关系。$L_p=1\,000$hPa，①、②、③同图2。实线为$\Delta p(L_x)$，虚线为$J(L_x)$

直运动而言两者不能较好地平衡，似乎在垂直方向上精度低了些，或在水平方向上精度高了些。在(c)中，$L_x=1\,000$km，L_p不变，$\overline{\omega}/\overline{u}$区间不变，$\Delta x=100$，200，381， 500km,分别对应 $J \geq 45$, $22 \leq J \leq 71$, $12 \leq J \leq 37$, $9 \leq J \leq 29$。此处 J 的上界很大，但 $L_x = 10^5$km的超长波其垂直速度较小，故可用相对较小的层次 J。

由图 3 可见，在(a)中，Δp随着L_x的增加而单调减小，且随着Δx的增大，Δp随着L_x增加而减小得越快。反之，J 随着L_x增加而单调增加，且随Δx的增大，J 随L_x增加而增加得越慢。对于$L_x = 1.0$, 1.5, 2.0, 2.5(10^7m)，当$\Delta x = 100$km时，分别对应 $J \doteq 46$, 82, 127, 175；当$\Delta x = 200$km 时，$J \doteq 22$, 41, 63, 88；当$\Delta x = 381$km时，$J \doteq 12$, 22, 33, 46。波长越长，需要的垂直分层越多。(b)中实、虚线的变化趋势与(a)相类似，但具体数值不同。对于$L_x = 1.0$, 1.5, 2.0, 2.5(10^7km)，当$\Delta x = 100$ km时，$J \doteq 141$, 263, 400, 556；当$\Delta x = 200$km 时，$J \doteq 71$, 130, 200, 278；当$\Delta x = 381$km时，$J \doteq 52$, 95, 147, 204。由于$\overline{\omega}/\overline{u}$增加，垂直分层 J 也大大增加。垂直分层数 J 与水平波长L_x成正比关系。



(a) $\left|\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\right| = \frac{1}{5} \times 10^{-4}$hPa/s　　(b) $\left|\frac{\overline{\omega}}{\overline{u}}\right| = 1.0 \times 10^{-4}$hPa/s

图 4 Δp与J_p的关系，$L_x = 5\,000$km，①、②、③、④同图 2。实线为$\Delta p(L_p)$，虚线为$J(L_p)$

由图 4 可见，在(a)中，Δp随着垂直方向的波长L_p的增加而单调增加，且随着Δx的增大，Δp随L_p增加而增加得越快。反之，J 随L_p增加而单调减小，且随Δx的增加，J 随L_p增加而减小得越慢。对于$L_p = 100$, 200, 400, 600, 800hPa，当$\Delta x = 100$km时，分别对应 $J \doteq 500$, 175, 62, 34, 22；当$\Delta x = 200$km时，$J \doteq 250$, 88, 31, 17, 11；当$\Delta x = 381$m时，$J \doteq 132$, 46, 16, 8, 5；当$\Delta x = 500$km时，$J \doteq 100$, 35, 12, 6, 4。垂直波长越短，所需要的垂直分层数越多。(b)中实、虚线的变化形势与(a)相类似，但具体数值不同。同样对于$L_p = 100$, 200, 400, 600, 800hPa，当$\Delta x = 100$km时，$J \doteq \infty$, 400, 139, 76, 50；当$\Delta x = 200$ km时，$J \doteq 556$, 196, 70, 38, 25；当

$\Delta x=381\mathrm{km}$ 时，$J\doteq 294, 104, 36, 20, 13$；当 $\Delta x=500\mathrm{km}$ 时，$J\doteq 227, 79, 28, 15, 10$。由于 $|\overline{\omega}/\overline{u}|$ 加大，J 也大大增大。垂直分层数 J 与垂直波长 L_p 成反比关系。

三、计算稳定性判据中Δp与Δx的关系

对于二维平流方程(1)式对应的微分-差分方程(4)式，可将时间微分化为时间中央差

$$A_{i,j}^{n+1}=A_{i,j}^{n-1}-\frac{\overline{u}\Delta t}{\Delta x}\left(A_{i+1,j}^{n}-A_{i-1,j}^{n}\right)-\frac{\overline{\omega}\Delta t}{\Delta x}\left(A_{i,j+1}^{n}-A_{i,j-1}^{n}\right) \tag{17}$$

式中n＝1，2，……表示时间积分步数，Δt为时间积分步长。令

$$A_{i,j}^{n}=B^{n\Delta t}e^{I(kx_i+mp_j)} \tag{18}$$

(18)式代入(17)式，得

$$B^{2\Delta t}+2I\lambda B^{\Delta t}-1=0 \tag{19}$$

式中 $\lambda=\frac{\overline{u}\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x+\frac{\overline{\omega}\Delta t}{\Delta p}\sin m\Delta p$　　(20)

则(19)式得

$$B^{\Delta t}=-I\lambda\pm\sqrt{1-\lambda^2} \tag{21}$$

若 $|\lambda|>1$，则 $1-\lambda^2<0$，$B^{\Delta t}$为虚数，$|B^{\Delta t}|$有一解大于1，此时，出现计算不稳定。若 $|\lambda|<1$，则 $1-\lambda^2>0$，$|B^{\Delta t}|\equiv 1$，此时，两个解均稳定。因此，

$$|\lambda|=\left|\frac{\overline{u}\Delta t}{\Delta x}\sin k\Delta x+\frac{\overline{\omega}\Delta t}{\Delta p}\sin m\Delta p\right|\leqslant 1 \tag{22}$$

为计算稳定性充要条件。若对所有k、m成立，则有

$$\Delta t\left(\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}+\frac{|\overline{\omega}|_{max}}{\Delta p}\right)\leqslant 1 \tag{23}$$

或

$$\Delta t\leqslant\left(\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}+\frac{|\overline{\omega}|_{max}}{\Delta p}\right)^{-1}=\Delta t_c \tag{24}$$

为计算稳定性条件。由(24)式可见，Δp、Δx都对Δt_c有影响，而且Δp、Δx、Δt_c中给定其中任意二个量，则第三个变量不能任意选取，而应满足(24)式，否则就会破坏计算稳定性条件。由(24)式右端等式可见，当Δp较小或$|\overline{\omega}|_{max}$较大时，$|\overline{\omega}|_{max}/\Delta p$较大，有可能与$|\overline{u}|_{max}/\Delta x$相比量级相当，则此项效应需要考虑，不能略去，反之，$|\overline{\omega}|_{max}/\Delta p$可略去。对Δx也可类似讨论。如取 $|\overline{\omega}|_{max}=10^{-2}\mathrm{hPa/s}$，$|\overline{u}|_{max}=100\mathrm{m/s}$，且设 $\Delta x=200\mathrm{km}$，$\Delta p=100\mathrm{hPa}$，则

$$\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}=5\times10^{-4}/s,\quad \frac{|\overline{\omega}|_{max}}{\Delta p}=1\times10^{-4}/s,\quad \Delta t_c=28\,\text{min(分)} \tag{25}$$

若仅考虑(25)式中第一式，对应的$\Delta t_c|_{\Delta x}=\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}=33\,\text{min}$ (26)

若仅考虑(25)式中第二式，对应的$\Delta t_c|_{\Delta p}=\frac{|\overline{\omega}|_{max}}{\Delta p}=167\,\text{min}$ (27)

由此可见，考虑Δx和Δp两者的效应所得$\Delta t_c=28$ min，显然它比考虑两者之一所得$\Delta t_c|_{\Delta x}$或$\Delta t_c|_{\Delta p}$要小。由于增加了垂直分辨率的影响，通常所得的水平格距对应Δt要减小，此处减小了5 min。这也是选取时间步长Δt值得注意的。令

$$\mu_0\geqslant\Delta t_c|_{\Delta x}-\Delta t_c=\left\{\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}\left(\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta p}{|\overline{\omega}|_{max}}+1\right)\right\}^{-1} \tag{28}$$

仍有$|\overline{u}|_{max}=100\,m/s$，$|\overline{\omega}|_{max}=10^{-2}\,hPa/s$，取$\Delta x=N\times10^5 m$，$\Delta p=1\,000/J\ hPa$，则由(28)式得

$$J\leqslant\frac{100\mu_0}{N(1\,000N-\mu_0)} \tag{29}$$

若取不考虑Δp的时间步长$\Delta t_c|_{\Delta x}$与考虑Δp的时间步长Δt_c之差$\mu_0=600s$，$N=2$，即$\Delta x=200km$，则$J\leqslant21$，若$\mu_0=300s$，仍取$\Delta x=200km$，则$J\leqslant9$。可见，$300s\leqslant\mu_0\leqslant600s$，对$\Delta x=200km$，有$9\leqslant J\leqslant21$。取垂直层次9层以下，对$\Delta x=200km$，$\Delta t_c|_{\Delta x}-\Delta t_c\leqslant5$ min，若取垂直层次21层以下，对$\Delta x=200km$，$\Delta t_c|_{\Delta x}-\Delta t_c\leqslant10min$，若垂直层次J大于21层，则$\Delta t_c|_{\Delta x}-\Delta t_c>10min$。确定$\Delta t_c$需考虑上述情况。因为仅考虑$\Delta t_c|_{\Delta x}$对较大的J有相当的误差。通常取$\Delta t=10$ min左右，因此，垂直层次J大于9就需注意Δt_c的取值。

四、Δp与Δx对物理解和计算解的影响

由(21)式可得

$$B_1^{\Delta t}=e^{-I\alpha}\qquad B_2^{\Delta t}=e^{I(\pi+\alpha)} \tag{30}$$

式中$\alpha=\sin^{-1}\lambda$。代入(18)式，得

$$A_{i,j}^n=(ae^{-I\alpha n}+be^{I(\pi+\alpha)n})e^{IkX_i} \tag{31}$$

二个初始条件分别为

$$A_{j,i}^0=Ge^{I(kx_i+mp_j)} \tag{32}$$

$$A_{i,j}^1=A_{i,j}^0-\frac{\overline{u}\Delta t}{2\Delta x}\left(A_{i+1,j}^0-A_{i-1,j}^0\right)-\frac{\overline{\omega}\Delta t}{2\Delta p}\left(A_{i,j+1}^0-A_{i,j-1}^0\right) \tag{33}$$

(31)式代入(32)、(33)式得

$$A^{*}_{i,j}=\frac{G}{2}\left\{\frac{H\cos\alpha}{\cos\alpha}\exp\left[\,I\,(kx_i+mp_j-\alpha n)\right]\right.$$

$$\left.+(-1)^{s+1}\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\exp\left[\,I\,(kx_i+mp_i+\alpha n)\right]\right\} \tag{34}$$

计算解与物理解两者振幅之比为

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\{\sin^{-1}\lambda\}}{1+\cos\{\sin^{-1}\lambda\}}=E \tag{35}$$

经计算得，当$\lambda\leqslant0.57$，$E\leqslant0.1$；当$\lambda\leqslant0.19$，$E\leqslant0.01$。因此，至少取

$$\lambda=\Delta t\left(\frac{\overline{u}}{\Delta x}\sin\frac{2\pi\Delta x}{L_x}+\frac{\overline{\omega}}{\Delta p}\sin\frac{2\pi\Delta p}{L_p}\right)\leqslant0.57 \tag{36}$$

计算解的相对振幅才不到1/10，其影响才大大减小。由(36)式可见，当$\overline{u}$、$\overline{\omega}$、L_x、L_p给定时，Δt、Δx、Δp三者不能相互独立，而是互相联系。其中二个给定，另一个则不能任意选取了。仍按前面对计算稳定性的讨论，若对所有k、m成立(36)式，则有

$$\Delta t\leqslant0.57\left(\frac{|\overline{u}|_{max}}{\Delta x}+\frac{|\overline{\omega}|_{max}}{\Delta p}\right)^{-1}=0.57\Delta t_c=\Delta T \tag{37}$$

仍取(25)式前二式的结果，则此处$\Delta t\leqslant16\min$。显然比(25)式中的第三式$\Delta t_c=28\min$要小得多。(27)式与(24)式比较，此处(37)临界Δt比(24)式临界Δt_c小0.57倍。与(28)式类似可定义

$$\mu_1\geqslant\Delta T|_{\Delta x}-\Delta T=0.57(\Delta t_c|_{\Delta x}-\Delta t_c) \tag{38}$$

与(29)式取值相同，由(38)式有

$$J\leqslant\frac{100\mu_1}{N(570N-\mu_1)} \tag{39}$$

实际上，将$\mu_1=0.57\,\mu_0$代入(29)式即得(39)式。显然，(39)式右端分母比(29)式右端分母小得多，则(39)式右端比(29)式右端大得多，仍取$N=2$，$\Delta x=200\text{km}$，则$\mu_1=$120，240，300，600s，对应$J\leqslant6$，13，18，26。若垂直分层数$J\geqslant13$层，则由垂直分辨率考虑与否引起的时间步长的差$\mu_1\geqslant240\text{s}=4\min$。由于此处临界$\Delta T$比$\Delta t_c$小近一半，故大于等于4 min的误差似乎也需注意。

五、结　　语

本文从二维线性平流方程出发，根据垂直分层和水平格距所分别引起的截断误差的平衡，导得垂直分辨率和水平分辨率的协调关系。并且得到垂直分层和水平分辨率对线性计算稳定性、物理解与计算解的影响的关系式。概括起来，得到如下4点结论：

1.对于作中期天气预报，当水平格距Δx给定，与之协调的垂直分层数J如表1所

示。因我国中期数值预报模式可能取$\Delta x=200-250km$，由表1可知，若$\Delta x=200km$，似取14层较好；若$\Delta x=250km$，$J=12$层较好。若因计算机速度和存储限制，$\Delta x=200km$，至少取$J=12$层；$\Delta x=250km$，至少$J=10$层。

表 1

Δx(km)	100	150	200	250	300	381	500
J(层)	26—30	17—20	12—15	10—12	8—10	5—8	2—5

2.对于作短期天气预报，当水平格距$\Delta x=100$，200，381km，与之协调的垂直分层J分别为$J=25$—26层，12—13层，6—7层。因B模式为$\Delta x=381km$，$J=5$层；按本文结果，似乎B模式垂直分层少了1—2层，垂直分辨率较粗，换言之，水平分辨率较细。若改进B模式，看来主要是提高垂直分辨率，而不是提高水平分辨率。实际上，已有个例表明，B模式水平格距缩小1/2，其预报准确率与没有缩小水平格距情况相差很小。同时，这也为以后嵌套网格加密B模式而不提高垂直层次提出一个疑问。是否要在提高B模式层次的基础上嵌套加密网格。

3.对于$\Delta x=200km$，垂直分层$J\geq 9$层时，需考虑垂直分辨率Δp对时间步长Δt的影响，此时已超过5 min；而$J\geq 21$层，Δp对Δt的影响超过10min。

4.若要减小计算解对物理解的影响，要减小线性稳定性判据所得的时间步长Δt的近一半。这样，计算解振幅仅是物理解振幅的1/10。此时，当$J\geq 13$层时，需考虑垂直分辨率所引起的时间步长误差大于4 min。

以上结果仅仅是初步的，Δp与Δx的协调关系还有待于用较复杂的模式加以进一步的研究。尽管如此，本文结果对我国中期数值预报模式中水平格距和垂直层次的协调选取有一定的指导意义。

参 考 文 献

[1] 廖洞贤等，数值天气预报原理和方法，气象出版社，1986。

[2] 廖洞贤、陆维松，适于数值天气预报的分解平流格式，气象科学，第1、2期，1—12，1982。

[3] Haltiner, G.J., Numerical Weather Prediction, John Wiley, 1971.

[4] Wiin-Nielsen, A., On truncation errors due to vertical differences in various numerical prediction models, Tellus, 3, 261—280, 1962.

[5] Staley, D.O., Baroclinic and Borotropic Instability Spectra as Function of N in N-level Models, J.A.S., 43, 1817—1832, 1986.

RESEARCH ON THE COORDINATION OF VERTICAL AND HORIZONTAL RESOLUTIONS

Lu Weisong

ABSTRACT

The relationship formula for the vertical and horizontal resolution coordination in the centered finite difference scheme of the advection equation(the vertical and horizontal spatial deviatives in the advection equation being transformed into centered difference)is derived and fully discussed from the two-dimensional linear advection equation(the two dimensions are in x and y directions)and on the principle of equality in the truncation error caused by vertical resolution and that caused by horizontal resolution in the difference equation. This study is important for the determination of the vertical levels and horizontal grid spacings in the Mid-Range Numerical Weather Forecast Model of China.