

冬季北大西洋地区海表温度与 500百帕高度的奇异值分解

孙照渤

章基嘉

J.M. 华莱士

(南京气象学院) (国家气象局)

(美国华盛顿大学)

摘要 本文介绍奇异值分解方法的原理及其在分析两个要素场之间线性关系中的应用。并用其对冬季北大西洋地区海表温度与500百帕高度标准化距平进行分析。结果表明,冬季北大西洋地区海表温度主要分布型与该地区的大气遥相关型密切相关。理论分析和实际计算结果都表明,奇异值分解方法在分析两个要素场之间的线性关系是很有效的。

关键词 奇异值分解, 海气相互作用, 奇异向量分布型

大气与海洋之间的作用是相互的,而且是两个要素场之间的相互作用。要揭示出它们之间的真正联系,就必须有合适的方法。

目前最常用的相关系数法,它虽在分析两个要素之间或者一个要素与一个场之间的线性关系时非常简单易行,但在分析两个要素场之间的关系时,会遇到很多困难。自然正交函数分析方法分析某一要素场的时空结构很有效,但要把两个不同的要素场联系在一起考虑也有困难。另外,典型相关法^[1]分析两要素场在时间域上的线性相依关系也很有效,但对要素场的空间结构考虑不够。

本文将介绍奇异值分解方法,它在时间和空间两方面考虑两要素场之间的相互关系;并用这种方法分析冬季北大西洋海表温度与500百帕高度之间的相互关系。

1 奇异值分解方法

奇异值分解方法是一种分析两个要素场之间相关的方法,即找到两要素场中若干对相关的空间分布,并使这种空间分布能最大地解释要素场的方差。

考察两个要素场, $Y=Y(x_j, t)$ 表示 t 时刻在 x_j 点上某要素的观测值, $j=1, 2, \dots, N_y$, $t=1, 2, \dots, \tau$ 。 $T=T(x_i', t)$ 表示 t 时刻在 x_i' 点上另一要素的观测值, $i=1, 2, \dots, N_T$, $t=1, 2, \dots, \tau$ 。一般地说,空间点数 N_y 和 N_T 是不相等的。

设两要素场的样本协方差矩阵为

$$M = \frac{1}{\tau} Y T' \quad (1)$$

是一个 $N_y \times N_T$ 的实矩阵, 它的奇异值分解为

$$M = \sum_{i=1}^r \sigma_i S_i Q_i^T \quad (2)$$

其中 $r = \min\{N_y, N_T\}$, S_i 是 M 的左奇异向量, Q_i 是 M 的右奇异向量, 都是与 σ_i 相对应的第 i 个列向量, 它们分别为正交空间函数, σ_i 称为 M 的奇异值, 为一数值, 且有 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$.

两要素场分别在正交空间函数 S 和 Q 上展开

$$\begin{aligned} Y &= SA \\ T &= QB \end{aligned} \quad (3)$$

其中 A 和 B 为时间系数矩阵。令 A_i 和 B_i 分别为左奇异向量 S 和右奇异向量 Q 的第 i 个向量 S_i 和 Q_i 所对应的时间系数, 并考虑奇异向量是正交函数组, 则有

$$\begin{aligned} A_i &= S_i^T Y \\ B_i &= Q_i^T T \end{aligned} \quad (4)$$

时间系数 A_i 和 B_i 分别表示空间分布型 S_i 和 Q_i 随时间的演变。 A_i 和 B_i 之间的协方差是最大的, 其证明可见文献[2, 3]。

由(2)式可知样本协方差矩阵 M 的元素平方和为

$$\sum_{i=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_T} C_{ij}^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i S_i Q_i^T) (Q_i S_i^T \sigma_i) = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \quad (5)$$

因此, 第 i 对奇异向量分布型所能表示的协方差的部分占总协方差的百分率为

$$P = \frac{\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} \quad (6)$$

若取前 H 对空间分布型, 则能表示的原资料场的协方差百分比为

$$P_H = \frac{\sum_{i=1}^H \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} \quad (7)$$

(6) 和 (7) 式可用来表示展开的精确度。

2 资 料

本文海表温度取自 COADS 资料, 分辨率取 4×10 经纬度网格。500 百帕高度取自 NMC 月平均高度资料, 使用 47×51 个格点的值。用 12、1、2 三个月的平均值定义为冬季海表温度或冬季 500 百帕高度。两个资料场数据都进行了标准化处理。时间从 1946 年 12 月到 1985 年 2 月共计 39 个冬季。取值范围主要在北大西洋地区 (见图 1)。

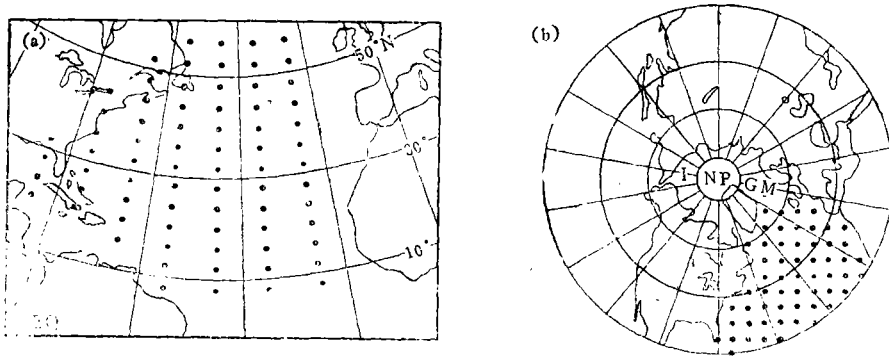


图1 a.海表温度取值区, b.500百帕高度取值区

3 北大西洋地区冬季海表温度与500百帕高度奇异向量分布型

首先计算海表温度和500百帕高度资料的协方差矩阵 M , 然后对 M 进行奇异值分解计算^[2], 得到 M 的奇异值和左奇异向量与右奇异向量, 这两组向量分别对应于海表温度和500百帕高度的空间分布型。用(4)式计算与它们相对应的时间系数序列。表1为分解结果, 由表可以看出, 前两对空间分布型就可以表示总协方差的72%, 收敛速度相当快; 每对奇异向量之间的相关系数也相当高, 均可达到信度 $\alpha=0.05$ 的显著性水平; 而且它们表示各自资料场的方差很有效, 其收敛速度也很快。

表1 奇异值分解结果

项 目	第一对	第二对	第三对
表示协方差的百分比	49%	23%	19%
相 关 系 数	0.68	0.76	0.63
表示海表温度方差的百分比	20%	20%	12%
表示500百帕高度方差的百分比	30%	22%	10%

由(2)式得知, 空间分布典型场在每个格点上的值就表示该点对协方差矩阵的贡献。表示空间分布典型场的另外一个方法是用相应的时间系数与原资料场求相关系数, 得到的相关系数分布即为该向量的空间分布。因为资料经过标准化处理, 故相关系数的分布与奇异向量的空间分布相同。可以证明, 这里的相关系数相当于把奇异向量用时间系数的模规格化。在分析中, 空间分布型都是用时间系数序列与原数据资料的相关系数表示; 区域也从北大西洋区域扩展到南大西洋和整个北半球。这样就可部分地看出北大西洋地区大气与海洋相互作用和其它地区的关系。

图2为北大西洋地区冬季海表温度与500百帕高度标准化资料奇异值分解第一对奇异向量的分布。由图可见, 这种分布型与Weare^[4]的“三明治”型很相似, 即在40°N, 70°W附近有一负值中心, 其两侧则为反位相活动区域, 中心分别位于55°N, 30°W和15°N, 50°W附近。在30°N附近, 变化的梯度相当大。与这种海表温度标准化距平相匹

配的500百帕高度标准化距平则为相当典型的北大西洋涛动型(NAO)^[5], 两个中心分别位于 30°N , 65°W 和 65°N , 40°W 。这一对奇异向量之间的线性相关系数为0.68。

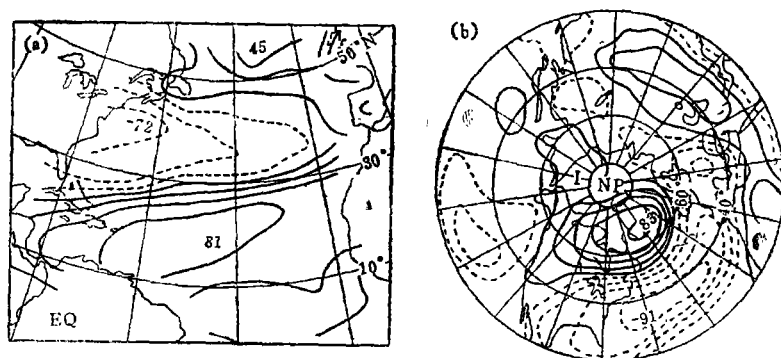


图2 冬季北大西洋海表温度与500百帕高度第一对奇异向量空间分布($\times 100$) 等值线间隔为20

a. 海表温度分布型, b. 500百帕高度分布型

图3是第二对奇异向量分布型。北大西洋海表温度在 25°N 附近为负值中心, 东西向呈带状, 它的两侧符号相反, 中心分别位于 45°N , 38°W 和 10°N , 40°W 附近。这种分布与文献[4]给出的非季节变化型非常相似。与之相匹配的500百帕高度型表现出在某些方面相似于欧亚型(EU)^[6]的分布特征。这一对分布型之间的相关系数可达0.76。

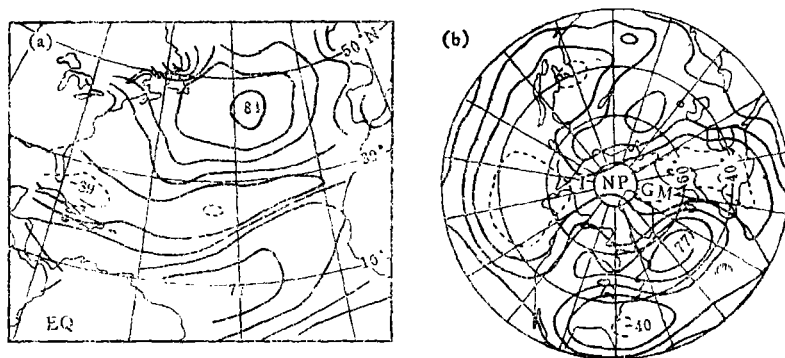


图3 第二对奇异向量空间分布型 其余说明同图2

图4为第三对奇异向量分布型。北大西洋海表温度分布表现出南北距平符号相反, 中心在大西洋西部, 分别位于百慕大东部和加拿大与美国交界沿海; 与之相匹配的500百帕高度型在大西洋上空为南北向的反位相分布。仔细比较第一对和第三对奇异向量的空间分布可以发现, 它们的分布型看起来相似, 但是南北位置有很大不同。

为便于比较, 还计算了相同资料的自然正交函数, 分解结果见表2。由表2可以看出, 前两个北大西洋海表温度的特征向量能表示原方差的37%, 前两个500百帕高度的特征向量能表示原方差的63%。与表1奇异值分解结果相比较可发现, 这两种方法在分别表示海表温度方差和500百帕高度场方差中, 虽有一定差异, 但其收敛速度还是相当的。

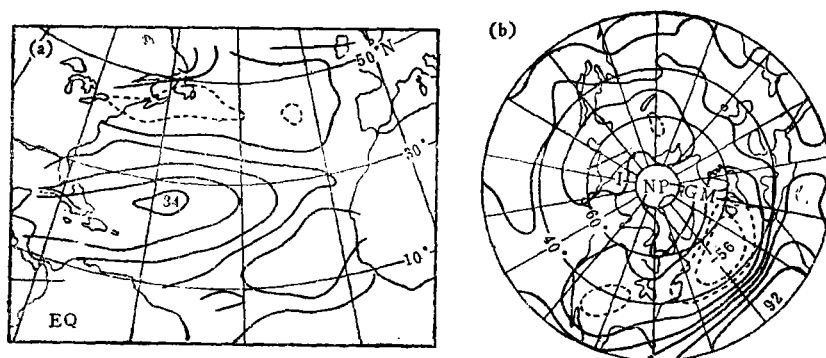


图4 第三对奇异向量空间分布型 其余说明同图2

表2 自然正交分解结果

项 目	第一向量	第二向量
海表温度分解表示方差的百分率	20%	17%
500百帕高度分解表示方差的百分率	37%	26%

图5为冬季北大西洋海表温度标准化距平前两个特征向量空间分布。第一特征向量分布型与奇异值分解第一对奇异向量的海表温度分布型很相似, 但特征向量分布型的中心强度略弱。第二特征向量分布型相似于第二对奇异向量的海表温度分布型。

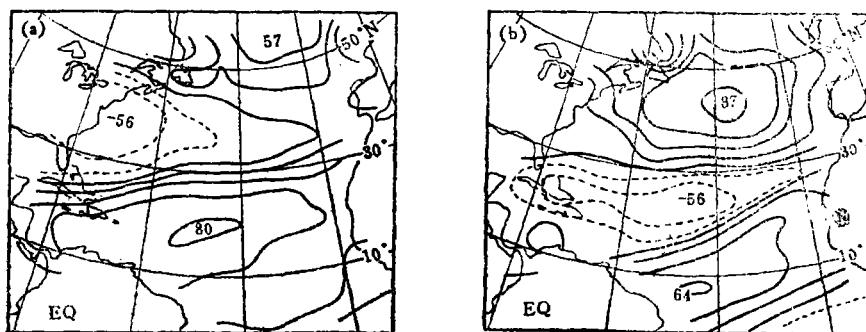


图5 冬季北大西洋海表温度标准化距平特征向量分布型($\times 100$) 等值线间隔为20
a. 第一特征向量, b. 第二特征向量

图6给出冬季北大西洋地区500百帕高度距平标准化资料的前两个特征向量分布

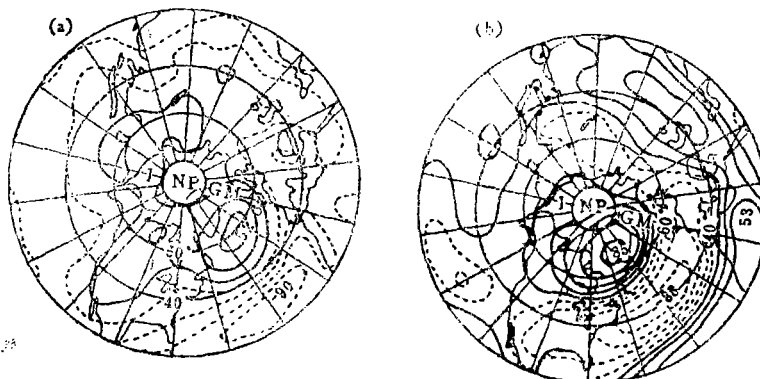


图6 冬季北大西洋500百帕高度标准化资料的特征向量空间分布型 其余说明同图5

型。第二特征向量分布型相似于奇异值分解中第一对奇异向量的500百帕高度的空间分布型,表现出北大西洋涛动(NAO)的分布特征。第一特征向量也表现出北大西洋地区南北向反位相分布,但与第一特征向量所给的中心位置有所不同。

4 讨论和结论

1. 奇异值分解方法能直接给出两个场之间有密切关系的空间分布型。计算结果表明,前几对奇异向量空间分布型有清楚的物理意义,收敛速度较快。这种方法在分析两个要素场之间的相关中有广泛的用处,值得进一步开发研究。

2. 本文分别用奇异值分解方法和自然正交分解方法分析了冬季北大西洋海表温度和500百帕高度标准化距平资料之间的关系。根据本文工作可以看出,奇异值分解方法适宜于分析两个要素场之间有相关关系的空间分布型,而自然正交分解适宜于研究单一要素场的空间分布及其随时间的演变。

3. 冬季,北大西洋500百帕高度场的空间结构与海表温度的空间结构有密切关系。分析得知,500百帕形势在北大西洋地区主要表现出南北方向反位相变化的特征,相应的海表温度也呈带状分布,但是500百帕高度的分布型中心所在位置与海表温度标准化距平的分布中心位置可能会有偏北或偏南的移动,有时甚至有偏西现象,这就使得北大西洋涛动(NAO)的典型分布,有时表现出西大西洋(WA)遥相关型^[6]的特点。这些空间分布型与海表温度的空间分布密切相关。

4. 与北大西洋地区500百帕高度标准化距平相关的海表温度分布中心主要位于中纬度地区。这说明,中纬度海表温度异常对大气变化的影响是很重要的。文献〔7〕曾对北大西洋海表温度对大气环流的影响进行了数值试验和观测分析研究,也表明中纬度的海表温度与大气分布型之间有相互反馈作用,能改变大气环流状况。因此,中纬度海洋与大气的相互作用是一个值得深入研究的问题。

参 考 文 献

- 1 Nicholls N, Mon Wea Rev, 1987, 115, 393—399
- 2 Golub G H, Kahan W, SIAM Numerical Analysis Ser B, 1965, 2, 205—224
- 3 Golub G H, Reinsch C, Numer Math, 1970, 14, 403—420
- 4 Weare B, Quart J Roy Meteor Soc, 1977, 103, 467—478
- 5 Roger J C, Mon Wea Rev, 1984, 112, 1990—2015
- 6 Wallace J M, Gutzler D S, Mon Wea Rev, 1981, 109, 785—812
- 7 Palmer T N, Sun Zhaobo, Quart J R Met Soc, 1985, 111, 947—975

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION ANALYSIS OF SST AND 500 hPa HEIGHT OVER THE NORTH ATLANTIC IN WINTER MONTHS

Sun Zhaobo

(Nanjing Institute of Meteorology)

Zhang Jijia

(State Meteorological Administration)

J.M. Wallace

(University of Washington, U.S.A.)

Abstract The Principle of Singular Value Decomposition(SVD)and its application in the investigation of the linear relationship between two fields are examined. The SVD is employed to study the relationship between SST and 500 hPa geopotential height standard anomalies over the North Atlantic in winter months. The results indicate that the SST patterns are well correlated with the teleconnection patterns at the 500 hPa height. It is shown that the method of SVD is very effective in studying the linear relationship between two fields.

Key words singular value decomposition, atmosphere-ocean interaction, singular vector distribution pattern