

# 主振荡型(POP)分析方法原理

章基嘉<sup>1)</sup> 丁 锋<sup>2)</sup> 王盘兴<sup>2)</sup>

(1)中国气象科学研究院,北京,100081,2)南京气象学院气象系,南京,210044)

**摘要** 对离散化场的时间序列,详细推导了主振荡型分析方法的两个导出量:主振荡型(POP)及其伴随相关型(ACP)。通过热带太平洋 SST 距平场时间序列 POP 及相应区域 850hPa 风场 ACP 的计算例子,给出了它们的实际算法。

**关键词** 主振荡型分析,原理

**分类号** O212,P732.6

80 年代末,Hasselmann 和 Storch 等首先将主振荡型(Principal Oscillation Pattern, 简称 POP)分析引入气象要素场随时间演变规律的研究之中<sup>[1,2]</sup>。POP 分析方法将复杂系统(它们既随时间也随空间变化)分离成仅依赖于时间和仅依赖于空间变化的部分,以便于对系统的时空演变特征分别考察。应用表明,它对于含有准周期移动特征的演变过程有较强的描述能力,因而在一些准周期振荡过程(如准 40 天振荡、ENSO 事件)的分析中得到应用。

POP 分析的主要难点是对主振荡型(POP)及其伴随相关型(Associated Correlation Pattern, 简称 ACP)的理解和计算,因此需要比较详细地给出 POP 和 ACP 的导出过程。本文以此为主要目的。

## 1 主振荡型(POP)

### (1)问题的提法

对离散化场的时间序列

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

其第  $s$  行向量为第  $s$  个格(站)点上要素的时间序列,记为

$$X_s = (x_{s1} \ x_{s2} \ \cdots \ x_{st} \ \cdots \ x_{sm}) \quad (2)$$

第  $t$  列向量为第  $t$  时刻的场,记为

$$X_t = (x_{t1} \ x_{t2} \ \cdots \ x_{ts} \ \cdots \ x_{tn})^T \quad (3)$$

式中,  $s = 1 \sim n$ ,  $t = 1 \sim m$ , 角标 T 为转置号。

设  $t$  时刻  $X_t$  的变率线性依赖于  $X_s$ , 即

• 本工作属长期天气预报理论和方法研究课题

收稿日期:1993-12-14;改回日期:1994-4-12

$$\frac{\Delta X_t}{\Delta t} = A X_t + R_t \quad (4)$$

式中,  $A$  为  $n$  阶方阵, 表示一个定常的线性变换;  $R_t$  为  $t$  时刻变率‘噪音’

$$R_t = (r_{t1} r_{t2} \cdots r_{tn})^T \quad (5)$$

再设  $\Delta t = 1$ , (4) 式可表作一个一阶多维自回归过程

$$X_{t+1} = (A + I) X_t + R'_t \quad (6)$$

式中,  $I$  为  $n$  阶单位方阵,  $R'_t$  为实际过程与一阶自回归过程的偏差,  $R'_t$  与  $R_t$  形式相同。记  $B = A + I$ , (6) 式可写为

$$X_{t+1} = B X_t + R'_t \quad (7)$$

假定偏差  $R'_t$  与  $X_t$  无关, 即

$$\langle R'_t, X_t^T \rangle = 0 \quad (8)$$

式中,  $\langle \rangle$  为时间平均记号。则以  $X_t^T$  右乘(7)式并对时间平均, 得

$$\langle X_{t+1} X_t^T \rangle = B \langle X_t X_t^T \rangle \quad (9)$$

记  $C_1 = \langle X_{t+1} X_t^T \rangle$ ;  $C_0 = \langle X_t X_t^T \rangle$

它们分别是  $X$  的时滞为 1, 0 的协方差方阵 ( $n$  阶), 其  $s_1$  行、 $s_2$  列的元素

$$C_{1s_1, s_2} = \langle x_{s_1}(t+1) x_{s_2}(t) \rangle; \quad C_{0s_1, s_2} = \langle x_{s_1}(t) x_{s_2}(t) \rangle$$

以  $C_1, C_0$  代入(9)式, 得

$$C_1 = B C_0 \quad (10)$$

再以  $C_0$  的逆  $C_0^{-1}$  右乘(10)式两端, 得

$$B = C_1 C_0^{-1} \quad (11)$$

显然,  $B$  为  $n$  阶非对称实矩阵。

对给定的  $X, B$  是确定的, 故一阶多维自回归过程((7) 式) 是确定的。

(2) POP 导出

(7) 式的实质是线性变换  $B$  作用于  $X_t$  得  $X_{t+1}$  的一个近似场, 故  $B$  的性质决定了过程的性质。 $B$  的最重要的性质由它的特征值( $\lambda$ )、特征向量( $P$ ) 反映。对实际问题, 当  $m > n$  时,  $B$  通常有  $n$  个不同的  $\lambda, P$ , 记为

$$\lambda^K, P^K, \quad K = 1 \sim n$$

它们满足关系

$$B P^K = \lambda^K P^K \quad (12)$$

按矩阵理论<sup>(4)</sup>, 非对称实矩阵  $B$  的特征值可取实值或复值; 如果  $\lambda^K$  是  $B$  的一个复特征值, 则其共轭  $\lambda^{K*}$  也是  $B$  的一个复特征值(即复特征值与其共轭成对出现); 并且, 若与  $\lambda^K$  对应的特征向量是  $P^K$ , 则与  $\lambda^{K*}$  对应的特征向量是  $P^{K*}$ 。 $P^K, K = 1 \sim n$  是一个线性无关向量组, 但它们相互间一般不交。

在 POP 分析中, 特征向量  $P^K$  被称为主振荡型(POP)。实的  $\lambda^K$  对应的  $P^K$  是实分量向量, 称为实的 POP, 它只能描述驻波振荡或演变趋势, 故又称为驻波型; 复的  $\lambda^K$  对应的  $P^K$  是复分量向量, 称为复的 POP, 它与  $\lambda^{K*}$  对应的  $P^{K*}$  一起, 能描述振荡的传播, 故又称为传播型。目前, POP 分析方法的应用主要限于它的传播型。

(3) POP 及其标准、正交化处理

对传播型 POP, 其  $\lambda^K, \lambda^{K*}$  可一般地记为

$$\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2, \quad \lambda^* = \lambda_1 - i \lambda_2 \quad (13)$$

其  $P^K, P^{K*}$  记为

$$P = P_1 + i P_2, \quad P^* = P_1 - i P_2 \quad (14)$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2$  为实数,  $P_1, P_2$  为  $n$  维实分量向量。序数  $K$  被省略。

一般情况下, (14) 式中的  $P(P^*)$  是非标准化的,  $P_1, P_2$  也不正交。但由性质(12),  $P$  可以有非零常数(复数域)倍之差、例如  $\alpha$  倍之差。为此, 设  $\hat{P} = \alpha P, \alpha = C e^{i\theta}$  是待定常数( $C$  是  $\alpha$  的模、 $\theta$  是幅角)。在条件

$$\left. \begin{aligned} (\hat{P}, \hat{P}) &= 1 \\ (\hat{P}_1, \hat{P}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

下, 可确定

$$\begin{aligned} C &= (\|P_1\|^2 + \|P_2\|^2)^{-1/2} \\ \theta &= \frac{1}{2} \arctg \frac{2(P_1, P_2)}{\|P_2\|^2 - \|P_1\|^2} \end{aligned} \quad (16)$$

式中,  $(\cdot, \cdot)$  为向量内积,  $\|\cdot\|$  为向量模算符。

值得指出的是, 标准化是对  $P$  进行, 正交是对一个  $P$  的实部与虚部进行的。

## 2 场的 POP 展开

由  $P^K$  的线性无关,  $X_t$  可表示为

$$X_t = \sum_{k=1}^n a_t^k P^K \quad (17)$$

$a_t^k$  是  $t$  时刻  $P^K$  的时间系数, 其确定应遵循“平行四边形法则”。在实际的 POP 分析中, 我们只用主要传播型(标准化形式为  $\hat{P}, \hat{P}^*$ ) 及其时间系数  $a_t, a_t^*$  表示  $X_t$  中与其对应的部分  $\tilde{X}_t$ ,

$$\tilde{X}_t = a_t \hat{P} + a_t^* \hat{P}^* \quad (18)$$

令

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{1}{2} a_{1t} - i \frac{1}{2} a_{2t} \\ a_t^* &= \frac{1}{2} a_{1t} + i \frac{1}{2} a_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将(13)、(14)、(19)代入(18), 得  $\tilde{X}_t$  的实的表示式

$$\tilde{X}_t = a_{1t} \hat{P}_1 + a_{2t} \hat{P}_2 \quad (20)$$

由  $\hat{P}_1, \hat{P}_2$  的正交性, 得时间系数

$$\begin{aligned} a_{1t} &= (\tilde{X}_t, \hat{P}_1) / \|\hat{P}_1\|^2 \\ a_{2t} &= (\tilde{X}_t, \hat{P}_2) / \|\hat{P}_2\|^2 \end{aligned}$$

在仅以  $\hat{P}, \hat{P}^*$  拟合  $X_t$  时,  $\tilde{X}_t$  可由  $X_t$  替代, 故

$$\left. \begin{aligned} a_{1t} &= (X_t, \hat{P}_1) / \|\hat{P}_1\|^2 \\ a_{2t} &= (X_t, \hat{P}_2) / \|\hat{P}_2\|^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将其代入(19)式, 得  $a_t, a_t^*$ 。

由(7)、(12)、(17)式, 可得不同时刻  $\hat{P}$  (类似地对  $\hat{P}^*$ ) 的时间系数间的关系

$$a_{t+1} = \lambda a_t$$

递推得

$$a_t = \lambda^t a_0 \quad (22)$$

将  $\lambda$  写为指数形式

$$\lambda = |\lambda|e^{i\omega}$$

并代入(22)式,得

$$a_t = a_0 |\lambda|^t e^{i\omega t} \tag{23}$$

据此,可得到主振荡型的两上重要参数:

(1) POP 的振荡周期  $T$

$$T = 2\pi/|\omega| \tag{24}$$

由(23)式,它是完成一个振荡所需的时间。

(2) POP 的振幅衰减时间  $\tau$

$$\tau = -1/\ln|\lambda| \tag{25}$$

由(23)式,它是振幅衰减为原先的  $1/e$  所需的时间。

根据(25)式,可将 POP 描述的波动分类为:

- $|\lambda| < 1, \tau > 0$ , 为衰减波(振幅随时间减弱);
- $|\lambda| = 1, \tau = \infty$ , 为中性波(振幅不随时间而变);
- $|\lambda| > 1, \tau < 0$ , 为增长波(振幅随时间增大)。

### 3 POP 描述的振荡过程

根据(20)式,  $X_t, t = 1 \sim m$  中由  $\hat{P}, \hat{P}^*$  描述的振荡过程  $\tilde{X}_t$  如表 1 所示(不计常数倍  $|\lambda|^t$  之差)。

表 1 主振荡型描述的振荡过程

Table 1 Oscillation described by principal oscillation pattern (POP)

$t$	$\omega > 0$					$\omega < 0$				
	0	$T/4$	$2T/4$	$3T/4$	$T$	0	$T/4$	$2T/4$	$3T/4$	$T$
$a_{1t}$	+	0	-	0	+	+	0	-	0	+
$a_{2t}$	0	-	0	+	0	0	+	0	-	0
$\tilde{X}_t$	$\hat{P}_1$	$-\hat{P}_2$	$-\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	$-\hat{P}_1$	$-\hat{P}_2$	$\hat{P}_1$

注:设  $a_{t=0}$  为正实数时由(18)、(19)式确定

\* The state of each phase of  $t$  is determined by Eqs. (18) and (19) with  $a_{t=0}$  as a positive real number

可见,POP 描述了由两种典型流型 ( $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ ) 及其相反流型 ( $-\hat{P}_1, -\hat{P}_2$ ) 轮流交替出现的场的振荡过程。

### 4 伴随相关型(ACP)

对  $X_t, t = 1 \sim m$  中由(18)或(20)式描述的主振荡过程,同期另一要素场集  $Y_t, t = 1 \sim m$  中存在一个与此相伴随的振荡过程,其复、实表示式为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_t &= a_1 q + a_1^* q^* = a_{1t} q_1 + a_{2t} q_2 \\ Y_t &= \tilde{Y}_t + S_t \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

式中,  $a_t$  是  $X$  的主振荡型时间系数,  $q$  是与之相应的(即以  $a_t$  为时间系数的)复伴随相关型,其实部、虚部分别为  $q_1, q_2$ 。  $S_t$  是  $t$  时刻仅用  $q, q^*$  或  $q_1, q_2$  描述  $Y_t$  产生的误差场;  $S_t$  是实的场,其格点总数  $n'$  不一定与  $X_t$  的格点总数  $n$  相等。

若以  $Y_s, S_s$  记  $s'$  点上  $Y, S$  的时间序列向量(由前,它为  $m$  维),  $q_{1s'}, q_{2s'}, q_s$  为  $s'$  点上伴随相关型的实部、虚部、复数值,则可在  $\|S_s\|^2$  最小(模方最小,等价于方差最小)意义下确定

$$\left. \begin{aligned} q_{1s'} &= \frac{\|a_2\|^2 \langle Y_s, a_1 \rangle - (a_1, a_2) \langle Y_s, a_2 \rangle}{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - (a_1, a_2)^2} \\ q_{2s'} &= \frac{\|a_1\|^2 \langle Y_s, a_2 \rangle - (a_1, a_2) \langle Y_s, a_1 \rangle}{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - (a_1, a_2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

可以证明,它与文献[2]给出的伴随相关型的复数形式

$$q_s = \frac{\langle |a|^2 \rangle \langle a^* Y_s \rangle - \langle a^{*2} \rangle \langle a Y_s \rangle}{\langle a^* a \rangle^2 - \langle a^2 \rangle \langle a^{*2} \rangle} \quad (28)$$

有关系  $q_s = q_{1s'} + i q_{2s'}$ 。

由(27)式确定的  $q_1, q_2$  是要素  $Y$  的两个空间分布型,由它们描写的  $\tilde{Y}_i$  与由主振荡型  $\hat{P}_1, \hat{P}_2$  描写的  $\tilde{X}_i$  同步变化。假如  $q_1, q_2$  的形态与  $\hat{P}_1, \hat{P}_2$  间存在可以从动力学角度作解释的联系,则伴随相关型的存在便有了物理上的合理性;否则,需要从统计上确定其可信与否。时滞的伴随相关型有预报意义。

### 5 实例

文献[3]用热带太平洋(122.5°E~87.5°W, 27.5°N~27.5°S)、格距  $\Delta\lambda \times \Delta\varphi = 5^\circ \times 5^\circ$ 、格点总数  $n = 184$  的月平均 SST 场时间序列资料(1950年1月~1988年10月共466个月)作 POP 分析,在进入 POP 分析前,先滤去资料序列中的正常年变化,再用 EOF 分析滤去‘噪音’(保留前15个特征向量描述的部分,它占距平场时间序列总方差的70%),保留部分记为  $\widehat{SSTA}$ , POP 分析对  $\widehat{SSTA}$  进行。在求得  $\widehat{SSTA}$  的  $\hat{P}_1, \hat{P}_2$  及  $a_1, a_2$  后,用大致相同范围(100°E~70°W, 38°N~38°S)上、格距  $\Delta\lambda \times \Delta\varphi = 5^\circ \times 4^\circ$ 、格点总数  $n' = 620$  的月平均 850hPa 风场时间序列(1974年12月~1988年2月共159个月, NMC 资料)求得了它们的伴随相关型  $q_1, q_2$ 。

(1)传播型 POP 对的空间特征

最重要的传播型 POP 对 ( $P, P^*$ ) 对总方差的贡献合计为 31.1%, 其实部、虚部的空间型如图 1(单位  $^\circ\text{C}$ )。

值得注意的是  $\hat{P}_1, -\hat{P}_2$  型表示的 SST 异常的空间分布与 Rasmusson 和 Carpenter<sup>[5]</sup> 统计得的

El Niño 事件成熟位相、衰减位相(图略)非常相似。故可认为  $\hat{P}_1(-\hat{P}_1)$  型是 El Niño (反 El Niño)事件成熟位相的 SST 异常分布型,  $\hat{P}_2(-\hat{P}_2)$  型则是反 El Niño  $\rightarrow$  El Niño (El Niño  $\rightarrow$

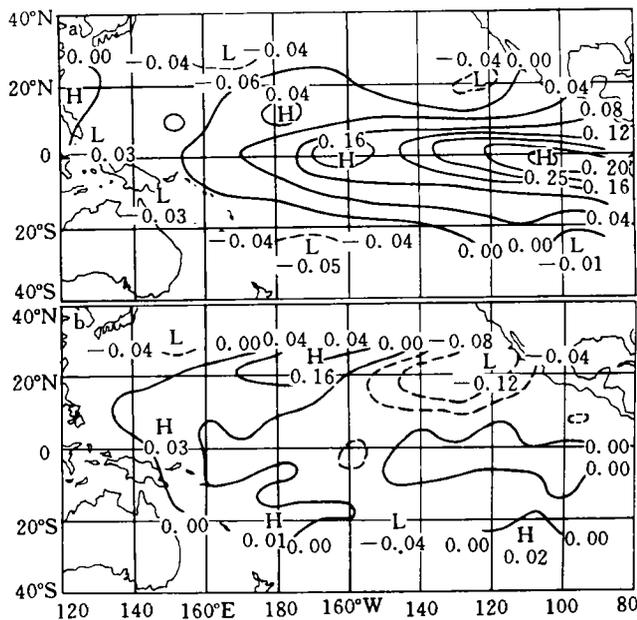


图 1  $\widehat{SSTA}$  的  $\hat{P}_1(a), \hat{P}_2(b)$

Fig. 1  $\hat{P}_1(a)$  and  $\hat{P}_2(b)$  for sea surface temperature anomaly

反 El Niño)事件转变的过渡位相。

(2)传播型 POP 对的时域特征

注意图 2 中  $a_1$  的高值(也是正值)段与 El Niño 事件发生时段(用横坐标轴上方的粗实线给出)、低值(负值)段与反 El Niño 事件发生时段<sup>(6)</sup>(粗虚线)有很好的对应关系。1950~1988 年 10 次 El Niño 事件均与  $a_1$  的峰值过程对应;7 次反 El Niño 事件  $a_1$  基本为负值。El Niño (反 El Niño)事件与  $a_2$  的关系则比较复杂。可见  $\hat{P}_1$  是描述 El Niño、反 El Niño 事件交替出现(理解为一种振荡)的主要空间型; $\hat{P}_2$  与  $\hat{P}_1$  配合起到描写振荡传播的作用。

(3)水平环流的伴随相关型

图 3a 表示 El Niño 事件中,赤道中、东太平洋(150°E 以东)存在强异常东风带,它起因于 SST 异常的东正西负,使太平洋 Walker 环流减弱甚至消失。图 3b 上略偏东的位置上存在较弱的西风异常,它表明在由反 El Niño → El Niño 事件调整过程中,存在着信风减弱的前兆(图中单位为  $m \cdot s^{-1}$ )。这些已由其他研究证实。

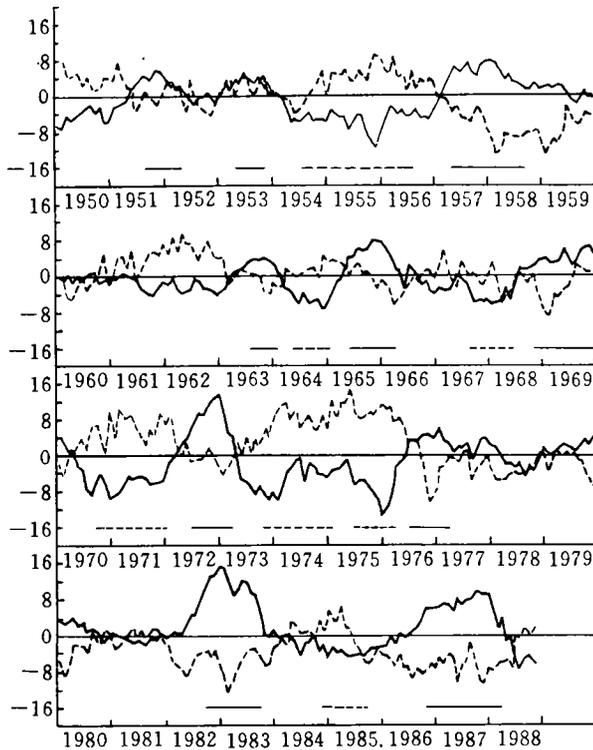


图 2  $\hat{P}_1, \hat{P}_2$  的时间系数曲线  $a_1$ (细实线)、 $a_2$ (细虚线)  
Fig. 2 Time coefficient curves  $a_1$  (thin solid lines) and  $a_2$  (thin broken lines) for  $\hat{P}_1$  and  $\hat{P}_2$ , respectively

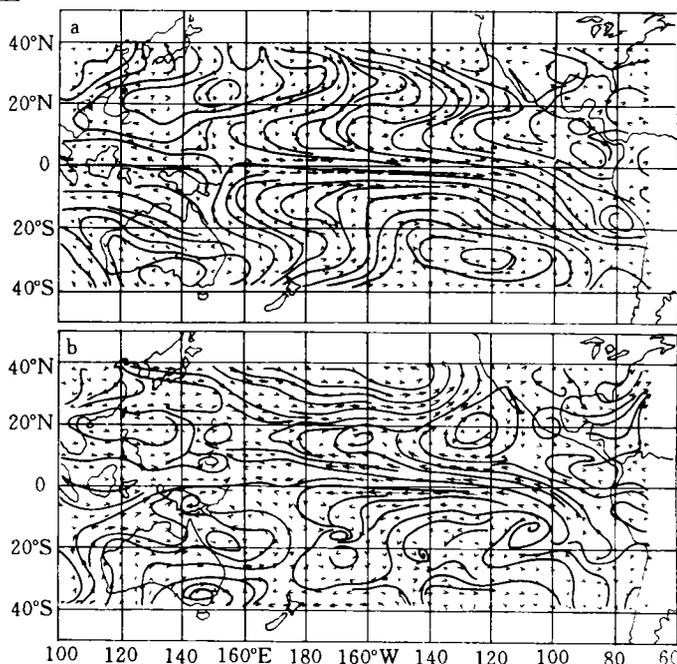


图 3 850hPa 风场的伴随相关型  $q_1$ (a)、 $q_2$ (b)  
Fig. 3 Associated correlation patterns  $q_1$ (a) and  $q_2$ (b) for the 850 hPa windfields

## 参 考 文 献

- 1 Hasselmann K. PIPs and POPs: The reduction of complex dynamical systems using Principal Interaction and Oscillation Patterns. *J Geophys Res.* 1988, 93: 11015~11021
- 2 Storch H V, Bruns T, Bruns I F, et al. Principal Oscillation Patterns analysis of 30 to 60 day oscillation in a GCM. *J Geophys Res.* 1988, 93: 11022~11036
- 3 章基嘉,丁 锋,王盘兴. 大尺度海气异常关系的主振荡型(POP)分析. *应用气象学报*,1993,4(增刊):1~7
- 4 北京大学数学力学系. 高等代数. 北京:人民教育出版社,1978. 280~293
- 5 Rasmusson E M, Carpenter T H. Variations in tropical sea surface temperature and surface wind fields associated with the Southern Oscillation / El Niño. *Mon Wea Rev.* 1982, 110: 354~384
- 6 ENSO 监测小组. 厄尔尼诺事件的划分标准和指数. *气象*,1989,15(3): 37~38

## TENETS OF PRINCIPAL OSCILLATION PATTERN ANALYSIS

Zhang Jijia

(China Academy of Meteorological Sciences, Beijing, 100081, PRC)

Ding Feng Wang Panxing

(Department of Meteorology, NIM, Nanjing, 210044, PRC)

**Abstract** From a discrete time series derivation is done of two derived quantities for principal oscillation pattern analysis, i. e., the principal oscillation pattern (POP) and its associated correlation pattern (ACP). A practical algorithm is presented from the examples of calculating the POP of a tropical Pacific SST anomaly time sequence and of ACP of the related-area 850 hPa wind.

**Keywords** principal oscillation pattern analysis, basic tenet