第 18 卷第 2 期
1995 年 6 月

南京气象学院学报
Journal of Nanjing Institute of Meteorology

Vol. 18 No. 2
Jun. 1995

近常定有限振幅斜压 Rossby 波的激发与选择性衰减和不相容两原理*

陆维松
（南京气象学院气象学系，南京，210044）

摘要 在斜压准地转两层流体的动量、能量和环流给定时，使用变分法，首次求得斜压流体最小位涡拟能解，此解正是斜压近常定有限振幅准确解。当通道长宽比、流体平均深度和能量三者都大于各自的临界值，且环流无垂直切变时，此准确解为有限振幅斜压 Rossby 波，否则，此准确解为纬向流。本文还首次提出“不相容原理”，即斜压大气有限振幅近常定 Rossby 波的正压和斜压两分量全波数不能相同。这表明这两种近常定波具有相当不同的水平和垂直结构，与观测事实和数值试验结果一致。

关键词 不相容原理，选择性衰减，有限振幅斜压 Rossby 波，常定
分类号 P433

在实际大气中经常观测到有组织的持续性大振幅流型，如阻塞形势、切断低压等等。它们的准定常特征的理论研究主要有：(1)行波[1,2]、偶极子[3]、KDV 动力学[4]和更一般的自由模[5]；(2)多重平衡态和大尺度强迫[6,7]。当前，(1)的研究很活跃，但均没有讨论其有限振幅常定状态是如何形成的。Yong 用 Bretherton 等提出的“选择性衰减”原理，讨论了从一般初始条件如何形成有限振幅常定正压波[8,9]。由于斜压性对形成持续性的大振幅流型有着重要的作用，因此，必须讨论从一般初始条件如何形成有限振幅常定斜压波。因斜压问题非常困难，迄今未见有人作此研究。本文采用变分方法[10]，将能量、动量和环流取为常数作为求最小位涡拟能解（下称 MINES）的约束条件，首次求得斜压近常定有限振幅准确解及其从一般初值形成的条件。

1 基本方程和积分不变量

β 平面上准地转斜压两层模式为

$$\frac{\partial q_n}{\partial t} + J(\psi_n, q_n) + \beta \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = 0 \qquad (n = 1,2) \tag{1}$$

式中 $q_n = \nabla^2\psi_n + (-1)^n F_n(\psi_1 - \psi_2)$，$\psi_n$ 是 n 层的流函数，Froude 数 $F_n = (\frac{L}{R_n})^2$，Rossby 变形半径 $R_n = \frac{1}{f_0}(g\frac{\Delta\rho}{\rho_0}D_n)^{1/2}$，$L$、$D_n$ 分别是长度尺度和 n 层流体深度，$\Delta\rho$、ρ_0 分别为两层流体密度差和密度特征值。流体域为矩形 $0 \leqslant x \leqslant a$，$-1 \leqslant y \leqslant 1$，且在 x、y 方向分别是周期和刚

* 国家基础性研究重大关键项目资助
收稿日期：1994－01－01；改回日期：1994－03－16

壁，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x}(x,\pm 1)=0, \quad \psi_n(x,y)=\psi_n(x+a,y), \quad (n=1,2) & (2) \\ \bar{u}_1(\pm 1)=-\dfrac{\partial\bar{\psi}_1}{\partial y}(\pm 1)=\pm\hat{U}, \quad \bar{u}_2(\pm 1)=-\dfrac{\partial\bar{\psi}_2}{\partial y}(\pm 1)=\pm\hat{V} & (3) \end{cases}$$

式是($\bar{}$)表示对 x 平均，a、$\hat{U}$、$\hat{V}$ 均为常数。

由(1)式易得能量、纬向动量和位涡拟能为积分守恒量，定义面积分

$$\int(\quad)\mathrm{d}A=\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-1}^1\mathrm{d}y(\quad)，有$$

能量 $$E=\frac{1}{2}\int\{F_2(\nabla\psi_1)^2+F_1(\nabla\psi_2)^2+F_1F_2(\psi_1-\psi_2)^2\}\mathrm{d}A \tag{4}$$

纬向动量 $$M=\int[F_2u_1+F_1u_2]\mathrm{d}A=\int[F_2yq_1+F_1yq_2]\mathrm{d}A \tag{5}$$

和位涡拟能 $$Z=\frac{1}{2}\int[F_2q_1^2+F_1q_2^2]\mathrm{d}A \tag{6}$$

可求出这三个量之间的比值的不等式

$$\begin{aligned} E &\geqslant\frac{1}{2}\int\{F_2u_1^2+F_1u_2^2\}\mathrm{d}A\geqslant\frac{1}{4}\{(\int F_2u_1^2\mathrm{d}A)^{1/2}+(\int F_1u_2^2\mathrm{d}A)^{1/2}\}^2 \\ &=\frac{1}{8a}\{\sqrt{F_2}[(\int u_1^2\mathrm{d}A)(\int 1\mathrm{d}A)]^{1/2}+\sqrt{F_1}[(\int u_2^2\mathrm{d}A)(\int 1\mathrm{d}A)]^{1/2}\}^2 \\ &\geqslant\frac{1}{8a}\{\sqrt{F_2}\int u_1\mathrm{d}A+\sqrt{F_1}\int u_2\mathrm{d}A\}^2 \end{aligned}$$

则 $e\equiv E/M^2\geqslant 1/(8aF_n)$， $z\equiv Z/M^2\geqslant 3/(8aF_n)$， $(F_n\geqslant F_l,\ \ n,l=1,2,n\neq l)$ 。上式先后使用了不等式 $a_1^2+a_2^2\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2)^2$ 、Schwarz 不等式。由此可见，不论 E、M 如何取值，最小位涡拟能必须大于 $3M^2/8aF_n$ 。

2 最小位涡拟能的变分问题及其解

当能量(4)和动量(5)取为常数时，位涡拟能(6)的最小值化为泛函 G 的极小值问题，即

$$\begin{aligned} G(\psi_1,\psi_2)\equiv&\int\frac{1}{2}(F_2q_1^2+F_1q_2^2)\mathrm{d}A+\lambda_1\int\frac{1}{2}[F_2(\nabla\psi_1)^2+F_1(\nabla\psi_2)^2+F_1F_2(\psi_1-\psi_2)^2]\mathrm{d}A \\ &+\lambda_2\int[F_2y\nabla^2\psi_1+F_1y\nabla^2\psi_2]\mathrm{d}A \end{aligned} \tag{7}$$

式中 λ_1、λ_2 均为 Lagrange 乘子。设泛函 G 中的 ψ_n 是方程(1)的解，且满足边条件(2)、(3) 式。由(7)式中泛函 G 的极小值的必要条件，得 Euler-Lagrange 方程

$$\nabla^2\psi_n+(-1)^nF_n(\psi_1-\psi_2)-\lambda_1\psi_n+\lambda_2y=0 \quad (n=1,2) \tag{8}$$

为方便，将流函数分为正压和斜压两部分，

$$\psi=\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2) \qquad \varphi=\frac{1}{2}(\psi_1-\psi_2)$$

代入(8)和(2)、(3)式分别得

$$\begin{cases} \nabla^2\psi+(F_2-F_1)\varphi-\lambda_1\psi+\lambda_2y=0 & (9) \\ \nabla^2\varphi-\lambda\varphi=0 & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\psi,\varphi)(x,\pm 1)=0, \quad (\psi,\varphi)(x,y)=(\psi,\varphi)(x+a,y) \\ -\dfrac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}(\pm 1)=\pm U, \quad -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(\pm 1)=\pm V \end{cases}$$

式中 $\lambda=\lambda_1+(F_1+F_2)$, $U=(\hat{U}+\hat{V})/2$, $V=(\hat{U}-\hat{V})/2$。由(8)式得

$$q_n+\beta y=\nabla^2\psi_n+(-1)^nF_n(\psi_1-\psi_2)+\beta y=\lambda_1\psi_n-\lambda_2 y+\beta y=\lambda_1(\psi_n+cy)$$

行波相速 $c=(\beta-\lambda_2)/\lambda_1$。将上式代入(1)式,得 $\dfrac{\partial\psi_n}{\partial t}+c\dfrac{\partial\psi_n}{\partial x}=0$,有行波解为

$$\psi_n(x,y,t)=\psi_n(\xi,y), \quad \xi=x-ct$$

对应有

$$\psi=\psi(\xi,y) \quad \varphi=\varphi(\xi,y)$$

由此可见,(8)式的最小位涡拟能解 ψ_n 正是方程(1)的常定行波解。

2.1　Euler-Lagrange 方程的对称解

由(9)、(10)式和前述边条件得对称解为

(1) $\lambda=-\alpha_1^2<0$,且 $\lambda_1=-\alpha_3^2<0$, $\alpha_1^2=\alpha_3^2-(F_1+F_2)$

$$\psi=\bar{\psi}(y)=\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2}\left[\frac{\sin\alpha_3 y}{\alpha_3\cos\alpha_3}-y\right]+\frac{\bar{U}\cos\alpha_3 y}{\alpha_3\sin\alpha_3}-\frac{(F_2-F_1)V\cos\alpha_1 y}{(F_2+F_1)\alpha_1\sin\alpha_1} \tag{11}$$

$$\varphi=\bar{\varphi}(y)=\frac{V}{\alpha_1\sin\alpha_1}\cos\alpha_1 y \tag{12}$$

(2) $\lambda=\alpha_2^2>0$

$$\varphi=\bar{\varphi}(y)=-\frac{V}{\alpha_2\mathrm{sh}\alpha_2}\mathrm{ch}\alpha_2 y \tag{13}$$

(Ⅰ)当 $\lambda_1=-\alpha_3^2<0$, $\alpha_3^2=(F_1+F_2)-\alpha_2^2$

$$\psi=\bar{\psi}(y)=\frac{\lambda_2}{\lambda_3^2}\left[\frac{\sin\alpha_3 y}{\alpha_3\cos\alpha_3}-y\right]+\frac{\bar{U}\cos\alpha_3 y}{\alpha_2\sin\alpha_3 y}+\frac{(F_2-F_1)V\mathrm{ch}\alpha_2 y}{(F_2+F_1)\alpha_2\mathrm{sh}\alpha_2} \tag{14}$$

(Ⅱ)当 $\lambda_1=\alpha_4^2>0$, $\alpha_4^2=\alpha_2^2-(F_1+F_2)$

$$\psi=\bar{\psi}(y)=\frac{\lambda_2}{\alpha_4^2}\left[y-\frac{\mathrm{sh}\alpha_4 y}{\alpha_4\mathrm{ch}\alpha_4}\right]+\frac{\bar{U}\mathrm{ch}\alpha_4 y}{\alpha_4\mathrm{sh}\alpha_4}+\frac{(F_2-F_1)V\mathrm{ch}\alpha_2 y}{(F_2+F_1)\alpha_2\mathrm{sh}\alpha_2} \tag{15}$$

式中 $\bar{U}=U+\dfrac{F_2-F_1}{F_2+F_1}V$。当 $V=0$ 或 $F_1=F_2$ 时,此处对称解 $\bar{\psi}(y)$ 与文献[8]一致。

由对称解(11)～(15)式得动量、能量和位涡拟能分别为

(1) $\lambda=-\alpha_1^2<0$, $\lambda_1=-\alpha_3^2<0$

$$M=\bar{M}(\alpha_3,\lambda_2,U,V)=2a(F_1+F_2)\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2}\right)\left(1-\frac{\tan\alpha_3}{\alpha_3}\right) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} E=\bar{E}(\alpha_3,\lambda_2,U,V)=a\{&(F_1+F_2)\left[\frac{\bar{U}^2}{2}\left(\csc^2\alpha_3-\frac{\cot\alpha_3}{\alpha_3}\right)+\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\sec^2\alpha_3\right.\right. \\ &\left.\left.-\frac{3}{2}\frac{\tan\alpha_3}{\alpha_3}\right)\right]+\frac{2F_1F_2V^2}{(F_1+F_2)\alpha_1^2}\left[\alpha_3^2\csc^2\alpha_1+(F_1+F_2-\alpha_1^2)\frac{\cot\alpha_1}{\alpha_1}\right]\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} Z=\bar{Z}(\alpha_3,\lambda_2,U,V)=a\{&(F_1+F_2)\left[\frac{\bar{U}^2\alpha_3^2}{2}\left(\csc^2\alpha_3+\frac{\cot\alpha_3}{\alpha_3}\right)+\left(\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2}\right)^2\left(\frac{\alpha_3^2}{2}\right)\left(\sec^2\alpha_3\right.\right. \\ &\left.\left.-\frac{\tan\alpha_3}{\alpha_3}\right)\right]+\frac{2F_1F_2}{F_1+F_2}\left(\frac{\alpha_3^2V}{\alpha_1}\right)^2\left(\csc^2\alpha_1+\frac{\cot\alpha_1}{\alpha_1}\right)\} \end{aligned} \tag{18}$$

(2) $\lambda=\alpha_2^2>0$

(Ⅰ) $\lambda_1=-\alpha_3^2<0$

$$M=\bar{M}(\alpha_3,\lambda_2,U,V)=2a(F_1+F_2)(\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2})(1-\frac{\tan\alpha_3}{\alpha_3}) \tag{19}$$

$$E=\bar{E}(\alpha_3,\lambda_2,U,V)=a\{(F_1+F_2)[\frac{\bar{U}^2}{2}(\csc^2\alpha_3-\frac{\cot\alpha_3}{\alpha_3})+(\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2})^2(1+\frac{1}{2}\sec^2\alpha_3 -\frac{3}{2}\frac{\tan\alpha_3}{\alpha_3})]+\frac{2F_1F_2V^2}{(F_1+F_2)\alpha_2^2}[\alpha_3^2\mathrm{csch}^2\alpha_2+(F_1+F_2+\alpha_2^2)\frac{\mathrm{cth}\alpha_2}{\alpha_2}]\} \tag{20}$$

$$Z=\bar{Z}(\alpha_3,\lambda_2,U,V)=a\{(F_1+F_2)[\frac{\bar{U}^2\alpha_3^2}{2}(\csc^2\alpha_3+\frac{\cot\alpha_3}{\alpha_3})+(\frac{\lambda_2}{\alpha_3^2})(\frac{\alpha_3^2}{2})(\sec^2\alpha_3 -\frac{\tan\alpha_3}{\alpha_3})]+\frac{2F_1F_2}{F_1+F_2}(\frac{\alpha_3^2V}{\alpha_2})^2(\mathrm{csch}^2\alpha_2+\frac{\mathrm{cth}\alpha_2}{\alpha_2})\} \tag{21}$$

(Ⅱ) $\lambda_1=\alpha_4^2>0$

$$M=\bar{M}(\alpha_4,\lambda_2,U,V)=2a(F_1+F_2)(\frac{\lambda_2}{\alpha_4^2})(\frac{\mathrm{th}\alpha_4}{\alpha_4}-1) \tag{22}$$

$$E=\bar{E}(\alpha_4,\lambda_2,U,V)=a\{(F_1+F_2)[\frac{\bar{U}^2}{2}(\frac{\mathrm{cth}\alpha_4}{\alpha_4}-\mathrm{csch}^2\alpha_4)+(\frac{\lambda_2}{\alpha_4^2})^2(1+\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2\alpha_4 -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{th}\alpha_4}{\alpha_4})]+\frac{2F_1F_2V^2}{(F_1+F_2)\alpha_2^2}[-\alpha_4^2\mathrm{csch}^2\alpha_2+(F_1+F_2+\alpha_2^2)\frac{\mathrm{cth}\alpha_2}{\alpha_2}]\} \tag{23}$$

$$Z=\bar{Z}(\alpha_4,\lambda_2,U,V)=a\{(F_1+F_2)[\frac{\bar{U}^2\alpha_4^2}{2}(\mathrm{csch}^2\alpha_4+\frac{\mathrm{cth}\alpha_4}{\alpha_4}) +(\frac{\lambda_2}{\alpha_4^2})^2(\frac{\alpha_4^2}{2})(\frac{\mathrm{th}\alpha_4}{\alpha_4}-\mathrm{sech}^2\alpha_4)]+\frac{2F_1F_2}{F_1+F_2}(\frac{\alpha_4^2V}{\alpha_2})^2(\frac{\mathrm{cth}\alpha_2}{\alpha_2}+\mathrm{csch}^2\alpha_2)\} \tag{24}$$

2.2 Euler-Lagrange 方程的非对称解

(9)、(10)两式的非对称解为

$$\psi=\bar{\psi}(y)+\psi'(\xi,y) \qquad \varphi=\bar{\varphi}(y)+\varphi'(\xi,y) \tag{25}$$

因 $\bar{\psi}(y)$、$\bar{\varphi}(y)$ 满足(9)、(10)式，则 ψ'、φ' 满足下式

$$\begin{cases}\hat{\nabla}^2\psi'+(F_2-F_1)\varphi'-\lambda\psi'=0\\ \hat{\nabla}^2\varphi'-\lambda\varphi'=0 \qquad (\hat{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})\end{cases}$$

式中 ξ 定义同前。(25)式中 $\bar{\psi}(y)$、$\bar{\varphi}(y)$ 已由(11)～(15)式给出。设 ψ'、φ' 满足前述边条件，则 λ 和 λ_1 满足量子化条件，即

$$-\lambda=r_{mn}^2=(\frac{2\pi m}{a})^2+(\frac{\pi n}{2})^2, \quad -\lambda_1=r_{m'n'}^2=(\frac{2\pi m'}{a})^2+(\frac{\pi n'}{2})^2$$

且

$$r_{m'n'}^2=r_{mn}^2+(F_1+F_2), \quad m'\neq m \quad 或 \quad n'\neq n \tag{26}$$

(m,n)、(m',n') 均取整数。(26)式表明，非对称解的正压和斜压分量的全波数不能相等，可称为“不相容原理”，这与量子力学的泡利原理颇为类似。当 n'、n 均为奇数时，ψ'、φ' 分别为

$$\begin{cases}\psi'=B\cos\frac{\pi n'}{2}y\cos[\frac{2\pi m'}{a}(x-ct)]-\frac{F_2-F_1}{F_2+F_1}A\cos\frac{\pi n}{2}y\cos[\frac{2\pi m}{a}(x-ct)]\\ \varphi'=A\cos\frac{\pi n}{2}y\cos[\frac{2\pi m}{a}(x-ct)]\end{cases}$$

而当 n' 或 n 为偶数时，上式的 $\cos\frac{\pi n'}{2}y$ 或 $\cos\frac{\pi n}{2}y$ 用 $\sin\frac{\pi n'}{2}y$ 或 $\sin\frac{\pi n}{2}y$ 代替。当 n'、n 分别取不同的奇偶组合，ψ'、φ' 共有 4 组解，且它们的能量和位涡拟能均相同，即

$$E'(r_{m'n'})=\frac{a}{4}D^2r_{m'n'}^2, \quad Z'(r_{m'n'})=r_{m'n'}^2E'(r_{m'n'})$$

式中 $D^2=(F_1+F_2)B^2+\frac{4F_1F_2}{F_1+F_2}A^2$，为按各层深度加权的波幅平方。而 $M'=0$。由上式可见，当

$$r^2_{m'n'}=r^2_{\bar{m}'\bar{n}'}=(\frac{2\pi\bar{m}'}{a})^2+(\frac{\pi\bar{n}'}{2})^2=r^2_{11}+(F_1+F_2)，且 r^2_{11}=(\frac{\pi}{2})^2+(\frac{2\pi}{a})^2 \tag{27}$$

时，(25)式中 ψ'、φ' 有最小位涡拟能存在，即

$$Z'(r_{\bar{m}'\bar{n}'})=r^2_{\bar{m}'\bar{n}'}E'(r_{\bar{m}'\bar{n}'}) \tag{28}$$

则此最小位涡拟能 $Z'(r_{\bar{m}'\bar{n}'})$ 对应的解 ψ'、φ' 分别为

$$\begin{cases}\psi'=B\cos(\frac{\pi\bar{n}'}{2}y)\cos[\frac{2\pi\bar{m}'}{a}(x-ct)]-\frac{F_2-F_1}{F_2+F_1}A\cos(\frac{\pi}{2}y)\cos[\frac{2\pi}{a}(x-ct)]\\ \varphi'=A\cos(\frac{\pi}{2}y)\cos[\frac{2\pi}{a}(x-ct)]\end{cases}$$

将(25)式代入(4)～(6)式，得总动量、总能量和总位涡拟能，即

$$\begin{cases}M\equiv\bar{M}(r_{\bar{m}'\bar{n}'})=2a(F_1+F_2)(\lambda_2/r^2_{\bar{m}'\bar{n}'})[1-(\tan r_{\bar{m}'\bar{n}'})/r_{\bar{m}'\bar{n}'}]\\ E\equiv\bar{E}(r_{\bar{m}'\bar{n}'})+E'(r_{\bar{m}'\bar{n}'})=\bar{E}(r_{\bar{m}'\bar{n}'})+\frac{a}{4}D^2r^2_{\bar{m}'\bar{n}'}\\ Z\equiv\bar{Z}(r_{\bar{m}'\bar{n}'})+Z'(r_{\bar{m}'\bar{n}'})=\bar{Z}(r_{\bar{m}'\bar{n}'})+r^2_{\bar{m}'\bar{n}'}[E-\bar{E}(r_{\bar{m}'\bar{n}'})]\end{cases} \tag{29}$$

已应用了(28)式，$\bar{M}$、$\bar{E}$、$\bar{Z}$ 由(16)～(24)式确定。

2.3　Euler-Lagrange 方程解的性质

因 $\hat{U}$、$\hat{V}$ 和 M 均为常数，则对称解能量和位涡拟能通过拉氏乘子 λ_1 有一函数关系，而非对称解能量与位涡拟能成线性关系。由图 1 可见，曲线 ABCD 和 $A_1B_1E_1$ 均对应给定能量、动量和环流下的 MINES。B、B_1 点处 $\lambda_1=0$，曲线 AB、A_1B_1 对应 $\lambda_1=\alpha_4^2>0$，图 2～4 仍有最低点为 $\lambda_1=0$，曲线左支为 $\lambda_1>0$。$-\lambda=\alpha_3^2=[0,\pi^2]$、$[0,(F_1+F_2)]$ 分别对应 BCE 和 B_1E_1，而 $-\lambda=\alpha_3^2>\pi^2$ 或 (F_1+F_2) 分别对应 ABCD、$A_1B_1E_1$ 上方的诸分岔线。

图 1 中与实线相切的虚线，均为头两个非对称模 $r_{2'1'}\simeq 0.6\pi$、$r_{2'2'}\simeq 1.1\pi$。因 $\alpha_3=r_{2'1'}<\pi$，则图 1(a)中非对称解 CD 从对称解的最低分支 BCE 的 C 点分岔，成为最小位涡拟能曲线的一部分。因此，当能量 E 小于 $\bar{E}(r_{2'1'})$ 时，则 MINES 为平行切变流；当 E 大于 $\bar{E}(r_{2'1'})$ 时，则 MINES 为平行切变流迭加常定斜压 Rossby 波。又因 $\alpha_3=r_{2'1'}>(F_1+F_2)^{1/2}=1$，则图1(b)中非对称解 C_1D_1 及其他非对称解将从 $A_1B_1E_1$ 上方诸实线分岔，从而没有 MINES。由此可见，环流没有垂直切变才可能有 MINES；又若 a 较小，(F_1+F_2) 较大，按(27)式使得 $r_{2'1'}>\pi$，则图 1(a)与(b)相似，所有非对称解将从 ABCD 上方诸实线分岔，没有 MINES。

3　变分解的讨论

3.1　$V=0$、$U=0$ 和 $M=0$

(1) $\lambda_2\neq 0$。$(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$ 或 $(\alpha_1,\alpha_2)\to 0$ 且 $(\frac{V}{\alpha_1\sin\alpha_1},\frac{V}{\alpha_2\mathrm{sh}\alpha_2})\to V_0$，下同。由(11)～(14)式得同一组解

$$u=\frac{1}{2}(u_1+u_2)=-\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\lambda_2}{\alpha_3^{*2}}(1-\frac{\cos\alpha_3^*y}{\cos\alpha_3^*}),\quad v=\frac{1}{2}(u_1-u_2)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

由(16)式 $M=0$，求得 $\alpha_3^*=4.49\cdots\cdots$。

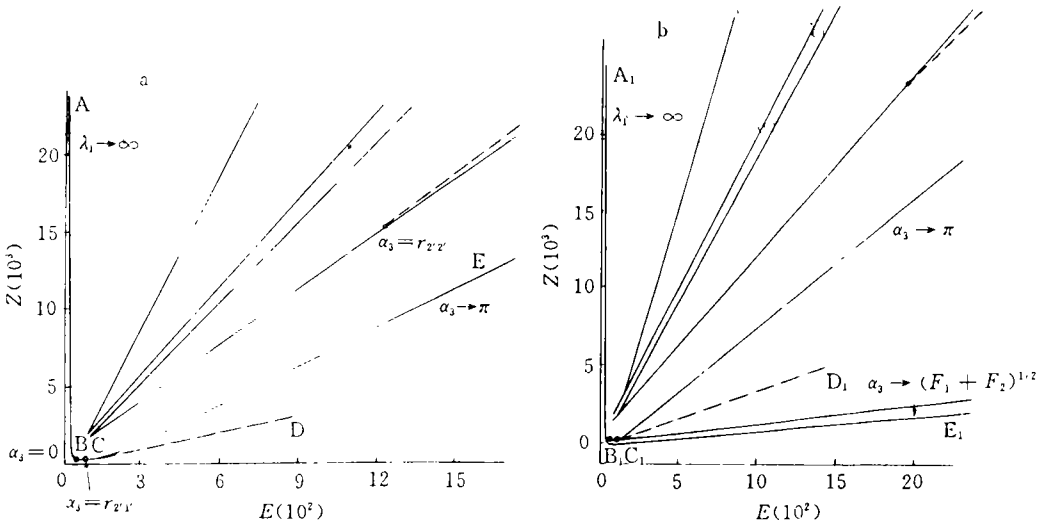

图1 $Z-E$ 函数曲线

实、虚线分别对应对称和非对称解 $a=11$、$F_1+F_2=1$、$M=9.4$

(a) $V=0$, $U=3.0$ (b) $V=0.5$, $U=3.0$

Fig. 1 Curves of $Z-E$ function with the symmetric and asymmetric solution denoted by solid and broken lines, respectively, for $a=11$, $F_1+F_2=1$ and $M=9.4$

(a) $V=0$, $U=3.0$ (b) $V=0.5$, $U=3.0$

(2)令 $\lambda_2=0$ 后,取 $\alpha_3 \to \pi$ 且 $\frac{\bar{U}}{\sin\alpha_3} \to \bar{U}_0$,类似得

$$u=\bar{U}_0 \sin\pi y, \quad v=0$$

式中 u、v 分别为纬向风的垂直平均和切变。对情况(1)、(2),由(17)、(18)、(20)、(21)式分别得

$$\bar{Z}=\alpha_3^{*2}\bar{E} \quad 和 \quad \bar{Z}=\pi^2\bar{E} \tag{30}$$

因 $\alpha_3^* > \pi$,情况(2)对给定能量有较小位涡拟能。

要使(29)式的总拟能 Z 小于(30)式的 $\bar{Z}$,则有

$$r_{m'n'}^2 < \pi^2 \tag{31}$$

并保证非对称解的分岔点位于 $0<\alpha_3<\pi$ 的对称解分支上。由(27)式知,有 $|\bar{n}'|=1$。又因 $|m|=|n|=1$ 对应非对称 MINES,将 $|\bar{n}'|=1$ 代入(27)、(31)两式,得非对称 MINES 应满足的关系式为

$$\begin{cases} a^2=4\pi^2[(\bar{m}'^2-1)/(F_1+F_2)] \\ 2 \leqslant |\bar{m}'| < \frac{\sqrt{3}}{4}a \quad 或 \quad a > \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.6 \end{cases} \tag{32}$$

由上两式消去 a,得

$$(F_1+F_2) < \frac{3\pi^2}{4}(1-\frac{1}{\bar{m}'^2}) = \hat{F}, \quad 5.6 \simeq (\frac{3\pi}{4})^2 < \hat{F} < \frac{3\pi^2}{4} \approx 7.4 \tag{33}$$

对实际大气,取 $f_0 \sim 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$, $g \sim 10\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $\Delta\rho/\rho_0 \sim 1.0$, $L \sim 10^6\mathrm{m}$ 和 $D_1=D_2=\bar{D}$,由(33)中 $\hat{F} \approx 5.6$ 得,$\bar{D} \gtrsim 0.4\mathrm{km}$。(32)、(33)式表明,斜压流体的非对称 MINES 的正压模纬向波数至少为2,矩形域长宽比 $\frac{a}{2}$ 和流体平均深度 $\bar{D}$ 均大于其临界值。斜压非对称 MINES 的正压和斜压模分别为 $r_{\bar{m}'1'}$ 和 r_{11}。图1取 $|\bar{m}'|=2$,满足(32)、(33)式。

3.2　(Ⅰ)$V=0$、$U\neq0$ 和 $M=0$；(Ⅱ)$V=0$、$U=0$ 和 $M\neq0$

(Ⅰ)考虑对称解，$M=0$ 对应：(1) $\lambda_2=0$ 和 α_2 连续；(2) $\alpha_3=\alpha_3^*\approx4.49$。

其中情况(1)的 $\hat{E}=\dfrac{2E}{a(F_1+F_2)U^2}$ 和 $\hat{Z}=\dfrac{2Z}{a(F_1+F_2)V^2}$ 的关系如图 2(a)实线所示。点 B_2 和左支 A_2B_2 同前。$0<-\lambda_1=\alpha_3^2<\pi^2$ 对应右支 $B_2C_2E_2$，$\lambda_1\to\infty$ 对应 $\hat{E}\to0$、$\hat{Z}\to\infty$；$\alpha_3\to\pi$ 对应 $\hat{Z}\to\pi^2\hat{E}$ 或 $\bar{Z}\to\pi^2\bar{E}$；$n\pi<\alpha_3<(n+1)\pi$　$(n=1,2,\cdots)$ 的每个 n 对应上方一束尖点分岔，此处仅给出 $\pi<\alpha_3<2\pi$ 分岔。图 2(a)中虚线对应非对称解(29)式，从实线的 C_2 点 $\alpha_3=r_{2'1'}\simeq1.94$ 分岔，仍取图 1 的参数值。由(17)、(18)式可得 $B_2C_2E_2$ 的斜率为 $dZ/dE=\alpha_3^2$。由(29)式得虚线斜率 $\alpha_3=r_{2'1'}$ 为常数。可见，虚线 CD 与实线 $B_2C_2E_2$ 在 C_2 的斜率相等，即相切，而实线斜率随 α_3 增加而增加，总大于虚线斜率，则虚线对应 MINES。由(29)式知，当 $\hat{E}>\hat{E}(r_{2'1'})$ 时，则 MINES 为一斜压 Rossby 波。情况(2)可得 $dZ/dE=\alpha_3^{*2}$，　$\pi<\alpha_3^*<2\pi$，虚直线在 $\alpha_3=\alpha_3^*$ 点与尖点分岔线相切，它不对应 MINES。

(Ⅱ)对称解：(1) $\lambda_2\neq0$，$U=0$ 且 α_3 连续；情况(1)如图 2(b)所示，令 $\tilde{E}=E/a(F_1+F_2)$，$\tilde{Z}=Z/a(F_1+F_2)$，$\tilde{M}=M/a(F_1+F_2)$，$0<-\lambda_1<\alpha_3^{*2}(\alpha_3^{*2}>\pi^2)$ 对应 $B_2C_2E_2$。当 $\lambda_1\to\infty$ 时，$\tilde{E}/\tilde{M}^2\to2$，$\tilde{Z}/\tilde{M}^2\to\infty$；当 $\alpha_3\to\alpha_3^*$，$\tilde{Z}/\tilde{M}^2=\alpha_3^{*2}(\tilde{E}/\tilde{M}^2)+\bar{U}^2/2$。若成立(32)、(33)式，则非对称解在 $\alpha_3=r_{m'1'}<\pi$ 处分岔，为 MINES。(2) $\alpha_3\to\pi$ 且 $\bar{U}_0=\bar{U}/\sin\alpha_3$ 为常数。由(11)、(12)、(19)～(21)式得

$$u=\frac{1}{2}\tilde{M}(1+\cos\pi y)+(2\tilde{E}-\frac{3}{4}\tilde{M}^2)^{1/2}\sin\pi y,\quad v=0 \tag{34}$$

和

$$\tilde{Z}/\tilde{M}^2=\pi^2(\tilde{E}/\tilde{M}^2)-\pi^2/4$$

则情况(2)将在 $\alpha_3=\pi$ 处分岔出如图 2(b)所示的虚线，为 MINES。$\tilde{E}<(>)\dfrac{3}{8}\tilde{M}^2$，分别对应情况(1)、(2)。

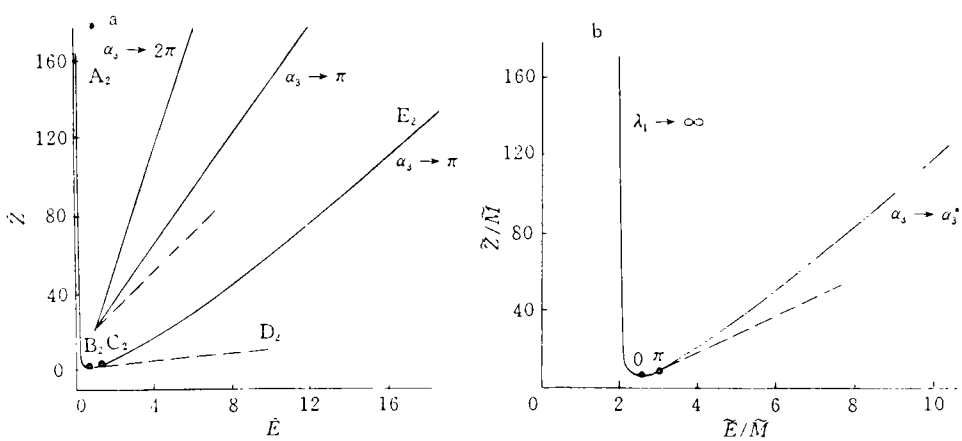

图 2　$V=0$ 时 $Z-E$ 曲线

(a) $U\neq0$，　$M=0$　　(b) $U=0$，　$M\neq0$

Fig. 2　$Z-E$ curves at $V=0$

(a) $U\neq0$，　$M=0$　　(b) $U=0$，　$M\neq0$

3.3　$V\neq0$；(Ⅰ)$U=0$，$M=0$；(Ⅱ)$U\neq0$，$M=0$；(Ⅲ)$U=0$，$M\neq0$

(Ⅰ) (1) $\lambda_2=0$ 且 α_3 连续；(2) $\alpha_3=\alpha_3^*$。对 $F_1+F_2<\pi^2$，情况(1)如图 3(a)所示。取 F_1

$=F_2=F=0.5$，令 $E_0=2FE/aV^2$，$Z_0=2FZ/aV^2$，右支 B_3E_3 对应 $0<\alpha_3<\sqrt{2F}$。当 $\alpha_3\to\sqrt{2F}$，$Z_0\to 2FE_0$，分岔 $H_3F_3H_2H_1$ 和 G_3 分别对应 $\alpha_1=[0,\pi]$ 和 $[\pi,2\pi]$。分岔 B_3E_3 和 $H_3F_3H_2H_1$ 的斜率为 $dZ/dE=dZ_0/dE_0=\alpha_3^2$。图 3(a)中虚线对应非对称解，从上方 $F_3H_2H_1$ 的 H_2 点的 $\alpha_3=r_{2'1'}$ 分岔，它不是 MINES。无论能量如何给定，MINES 仅为平行流。值得注意这一结果只与 $V\neq 0$ 有关，由于 $V\neq 0$，使得实线在 $0<\alpha_3<\pi$ 中 $\alpha_3=\sqrt{2F}$ 处断开，在 $0<\alpha_3<\sqrt{2F}$ 上方产生新分支 $\sqrt{2F}<\alpha_3<(\pi^2+2F)^{1/2}$，而 $\alpha_3=r_{\bar{m}'\bar{n}'}=(r_{11}^2+2F)^{1/2}>\sqrt{2F}$ 恒成立，故虚线分岔点只能位于此新分支。再注意(29)式，上方虚线也不可能与最低实线 B_3E_3 相交向下，则虚线对应的非对称解不可能为 MINES。情况(2)有 $dZ_0/dE_0(\alpha_3^*)=\alpha_3^{*2}$，$\alpha_3=\alpha_3^*$ 位于上方分岔 G 上，没有非对称 MINES。对 F_1、F_2 的其他值，也都没有非对称 MINES。

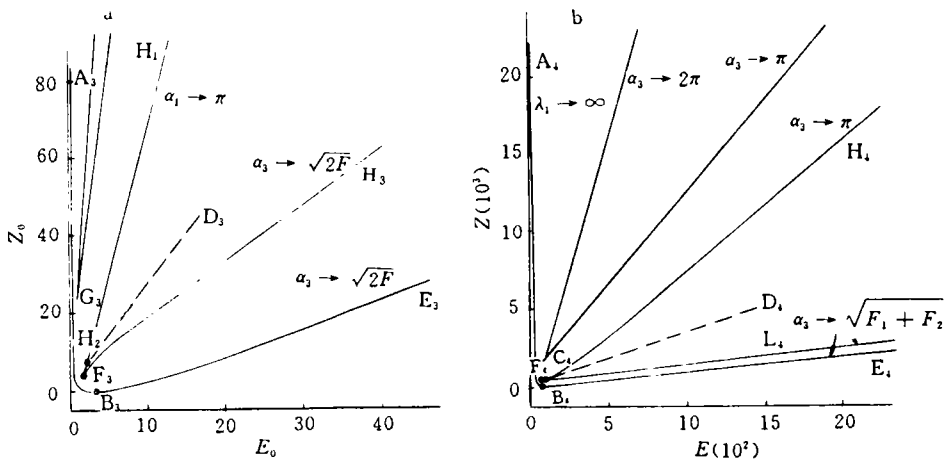

图3 $V\neq 0$，$M=0$ 时 $Z-E$ 函数图

(a) $U=0$，$F_1=F_2=F=0.5$ (b) $U=3.0$，$F_1+F_2=1$，$V=0.5$

Fig. 3 Diagrams of $Z-E$ function for $V\neq 0$ and $M=0$

(a) $U=0$，$F_1=F_2=F=0.5$ (b) $U=3.0$，$F_1+F_2=1$，$V=0.5$

(Ⅱ)(Ⅰ)中情况(1)的对称解如图 3(b)实线所示，右支 B_4E_4 为 $0<\alpha_3<\sqrt{F_1+F_2}$，上方分岔均有 $\alpha_3>\sqrt{F_1+F_2}$。B_4E_4 和 $L_4F_4C_4H_4$ 的斜率为 $dZ/dE=\alpha_3^2$，虚线从 C_4 点 $\alpha_3=r_{2'1'}$ 分岔。显然，没有非对称 MINES。

(Ⅲ)同(Ⅱ)，如图 4(a)所示，右支 B_5E_5 为 $0<\alpha_3<\sqrt{2F}$，其斜率和其他曲线与(Ⅰ)相同。虚线从 C_5 点 $\alpha_3=r_{2'1'}$ 分岔，MINES 仍仅为平行流。其他情况类似。

3.4 一般情况：V≠0，U≠0 和 M≠0

结果如图 4(b)所示，括号表示 $(\frac{V}{M},\frac{U}{M})$，内、外坐标分别表示曲线 1 和其他曲线。由曲线 2、4 可见，$\frac{V}{M}=0.5$ 不变，$\frac{U}{M}$ 由零增加到 2，曲线 2、4 的右支断开于 $\alpha_3=1$，$\alpha_3>1$ 形成较高拟能级的新分支，而非对称解必由此新分支分岔，故没有非对称 MINES；由曲线 1、3 可见，$\frac{V}{M}=0$ 不变，$\frac{U}{M}$ 由零增加到 2，右支总有 $\alpha_3\leqslant\pi$，当(32)、(33)式满足时，则当 $E>\bar{E}(r_{\bar{m}'1'})$ 时，MINES 是有限振幅斜压 Rossby 波。

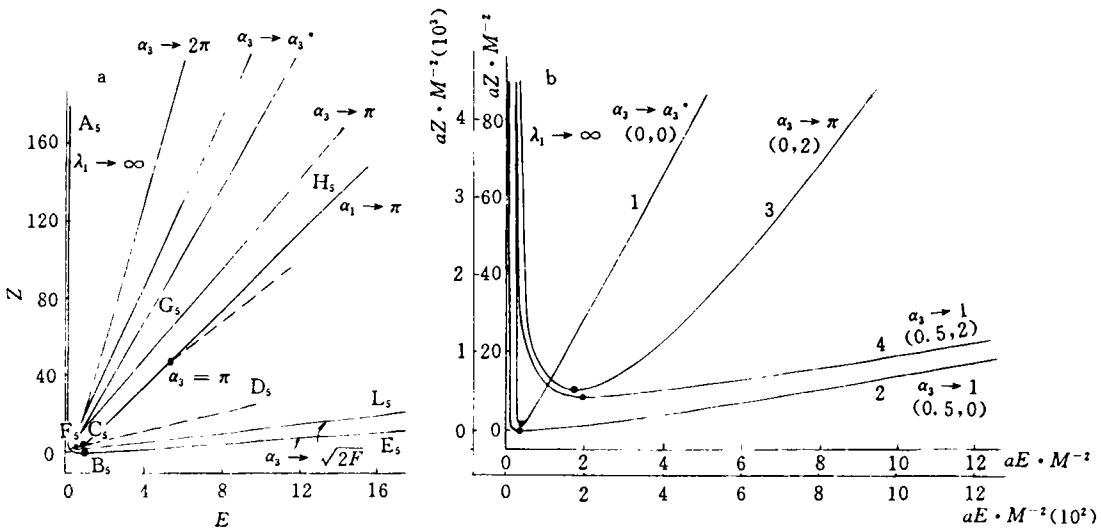

图 1　Z－E 函数图

(a) $U = 0$，　$V = 0.5$，　$F = F_1 = F_2 = 0.5$　　(b) 一般情况

Fig. 2　Diagrams of $Z - E$ function

(a) $U = 0$，　$V = 0.5$，　$F = F_1 = F_2 = 0.5$　　(b) general cases

4　驻定值是极小值

为证明 G 的驻定值是极小值，令

$$\psi_1 = \psi_{10} + \alpha\eta_1, \quad \psi_2 = \psi_{20} + \alpha\eta_2$$

式中 ψ_{10}、ψ_{20} 是(8)式的驻定解。由(7)式得

$$\delta^2 G = \frac{\alpha^2}{2}\int\{[F_2\hat{q}_1^2 + F_1\hat{q}_2^2] + \lambda_1[F_2(\nabla\eta_1)^2 + F_1(\nabla\eta_2)^2 + F_1F_2(\eta_1 - \eta_2)^2]\}\mathrm{d}A$$

式中 $\hat{q}_n = \nabla^2\eta_n + (-1)^n F_n(\eta_1 - \eta_2)$。当 $\lambda_1 = \alpha_4^2 \geqslant 0$ 时，二阶变分 $\delta^2 G > 0$ 恒成立，则驻定解是极小值。注意到

$$W(\eta_1, \eta_2) = \int[F_2\hat{q}_1^2 + F_1\hat{q}_2^2]\mathrm{d}A \Big/ \int[F_2(\nabla\eta_1)^2 + F_1(\nabla\eta_2)^2 + F_1F_2(\eta_1 - \eta_2)^2]\mathrm{d}A$$

在 η 的 x、y 方向边条件分别为周期和刚壁，W_n 的极小值为 $W_{\min} = \min(\pi^2, r_{2'1'}^2)$。当 $-\lambda_1 = \alpha_3^2 \leqslant r_{2'1'}^2$ 且满足(32)、(33)式，则有 $\delta^2 G \geqslant 0$。虽然，$\alpha_3 = r_{2'1'}$ 对应 $\delta^2 G = 0$，但此时 $\alpha_3 = r_{2'1'} < \pi$，如图 1、2(a)所示，虚线对应非对称 MINES。

5　结　语

本文结果表明：当动量、能量和环流给定时，对于实际斜压大气，通道长宽比大于 2.3 和平均深度大于 0.4km。因此，当环流没有垂直切变且能量 $E > \bar{E}(r_{\bar{m}'1'})$　$(\bar{m}' \geqslant 2)$ 时，MINES 为近常定有限振幅的斜压 Rossby 波，当任一条件不成立，则 MINES 为纬向切变流。

因 MINES 是稳定的，所有具有相同的能量、动量的邻近 MINES 的流动有更多的位涡拟能，将按“选择性衰减原理”趋于最小位涡拟能状态。非零垂直切变使最小位涡拟能级 $0 < \alpha_3^2 < \pi^2$ 在 $\alpha_3^2 = F_1 + F_2$ 处分裂，将 $\pi^2 > \alpha_3^2 > F_1 + F_2$ 跃迁为较高拟能级的新分支，非对称解由于 $V \neq 0$ 引起的斜压不稳定得到更多的拟能即 $\alpha_3^2 = r_{\bar{m}'1'}^2 > (F_1 + F_2)$ 也跃迁到此新分

支，不是MINES。因此，当环流无切变时，才可能有非对称MINES，且满足 $\frac{a}{2} \geqslant 2.3$ 和 $F_1 + F_2 < \hat{F}$ 。类似(34)式，当动量给定、能量增加时，将能量储存于MINES而不增加动量。由不相容原理知，MINES的斜压模有最小波数 $|m| = |n| = 1$ ，而其正压模波数为 $|\bar{m}'| \geqslant 2$，$|\bar{n}'| = 1$ 。显然，斜压模比正压模的纬向尺度大得多，且二者垂直结构不同。斜压和正压模分别为温度波和位势波。许多诊断分析和数值试验表明[11~13]，1波定常波主要对应于定常热源的响应，具有斜压结构；而2波定常波主要对应大地形强迫的响应，具有相当正压结构。Held曾从物理上精辟地解释了热力强迫定常波的尺度比地形强迫定常波大得多的奇怪现象[11]。本文首次提出的不相容原理正说明这两种定常波具有相当不同的水平和垂直结构，与观测事实和数值试验结果一致。因此，本文比Yong用正压模式所得的 $|m| = 1$ MINES的正压模有本质的改进[9]。斜压有限振幅近常定波激发条件与实际大气中常定波产生需要得到较大的能量和基流具有相当正压结构一致。本文结果还提供了用 $Z - E$ 平面上动点轨线来解释和诊断斜压流体的演变及总结数值试验结果的一种有力工具。

参 考 文 献

1 Crag R A. A solution of nonlinear vorticity equation for atmospheric motion. J Meteor, 1945, 2: 175～178

2 Kuo H L. Finite-amplitude three-dimensional harmonic waves on the spherical earth. J Meteor, 1959, 16: 524～534

3 McWiliams J C. An application of equivalent modons to atmospheric blocking. Dyn Atmos Oceans, 1980, 5: 43～66

4 Malguzzi P, Malannotte-Rizzoli P. Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking. Part Ⅰ: The analytic theory. JAS, 1984, 41: 2620～2628

5 Branstator G, Opsteegh J D. Free solutions of the barotropic vorticity equation. JAS, 1989, 46: 1799～1814

6 Charney J G, DeVore J G. Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. JAS, 1979, 36: 1205～1216

7 Shutts G J. The propagation of eddies in different jet-stream eddy vorticity forcing of "blocking" flow fields. Quart J Roy Meteor Soc, 1983, 109: 737～761

8 Bretherton F, Haidvogel D. Two-dimensional turbulence above topography. JFM, 1976, 78: 129～154

9 Yong W R. Selective decay of enstrophy and the excitation of barotropic waves in a channel. JAS, 1987, 44: 2804～2812

10 Henrotay H. Nonlinear barotropic instability: an approach based on Seerin's energy method. JAS, 1983, 40: 762～768

11 Hoskins B, Pearce R. Large-scale dynamical processes in the atmosphere. Academic Press, 1983

12 Huan R H, Gambo K. The response of a hemispheric multi-level model atmosphere to forcing by topography and stationary heat sources. Part Ⅰ, Ⅱ, J Meteor Soc Japan, 1982, 60: 78～108

13 雷兆崇．一个大气定常波的非线性初始方程谱模式．热带气象，1988，4：16～26

EXCITATION OF NEAR STEADY FINITE-AMPLITUDE BAROTROPIC ROSSBY WAVE AND TWO PRINCIPLES OF THE SELECTIVE DECAY AND NO-COEXISTENCE

Lu Weisong

(Department of Meteorology, NIM, 210044, Nanjing, PRC)

Abstract　When the momentum, energy and circulation of a fluid in a quasi-geostrophic baroclinic two-layer model are specified, the minimum enstrophy solution of the baroclinic fluid is first obtained by the variation method, and is none other than an exact one of nearly steady baroclinic finite-amplitude problems. If the ratio of length to breadth of the channel, the average depth of fluid and the energy are greater than their critical values respectively, and the circulation is of no vertical shear, the exact solution is the finite amplitide baroclinic Rossby waves; otherwise it is the zonal flows. "Principle of no-coexistence" is first proposed meaning that all wavenumbers between the barotropic and the baroclinic components of nearly steady finite amplitude Rossby wave in the baroclinic atmosphere are not the same. This indicates that two kinds of nearly steady waves have quite different horizontal and vertical structures, results that agree with observational facts and outcome of numerical experiments.

Keywords　principle of no-coexistence, selective decay, finite-amplitude, baroclinic finite amplitude Rossby wave, near steady