

递归相似

刘桂馥

(南京气象学院基础科学系, 南京, 210044)

摘要 为观测研究提出一种动力学模型。新模型将不依赖统计概念, 也不依赖对象的任何先验的理论模型, 因此它具有极大的一般性。递归相似是核心概念, 由此产生邻域函数、跃度和演化相似等概念和可计算的指标, 它们描述了观测序列的演化性态。

从观测序列(向量的或函数的)重建动力系统是我们的总体工作, 本文是这项工作中的独立部分。

关键词 递归相似, 动力系统, 活动标架

分类号 P433

气象学理论和实践证实了大气是一个近似的动力系统。若不借助于理论模型, 在观测研究中就难以建立动力演化的概念。

1 递归相似

1.1 动力系统

微分方程初值问题是一个特殊的动力系统。设有一个向量序列 (u_j) , 即

$$u_1, u_2, \dots, u_j, \dots \quad (1)$$

u_j 或是一个函数 $u_j = u_j(x)$, 或是一个实向量 $u_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。

称(1)是离散动力系统的流, 指由元素 u_i 可以唯一地确定其身后的元素 u_j , 限定 $j \geq i, i = 1, 2, \dots$ 。具有这个限制的系统称半动力系统。半动力系统的定义: 一个算子族, 算子具有性质

$$\begin{aligned} F(i, j) u_i &= u_j, \quad F(i, k) = F(j, k) F(i, j) \quad i \leq j \leq k \\ \{F(i, j) \quad j \geq i \quad i = 1, 2, \dots\} \end{aligned} \quad (1)'$$

算子族(1)'称系统的演化半群, 该半群就是动力系统。而(1)是系统的流。

本文的目的是寻求算子 F 对具体流(1)的近似表示。

1.2 活动标架和递归相似

几何上的重要方法是活动标架方法。以曲线上某点处的切向量、主法线和次法线向量构成一个属于该点的正交标架。曲线在该点处的几何量借此标架表示, 这就是自然坐标方法。

现在以活动标架的观点讨论序列(1), 这里只考虑序列自身对自身的表示。

假设 u_j 均为 n 维实向量。取定整数 m 作分析指标(或称分析水平, 意义下文自明)。向量组

$$(u_{j-1}, u_{j-2}, \dots, u_{j-m}) \quad (2)$$

作为时刻 j 处的“标架”。对 $j > m$ 的元素 u_j

$$u_j = \sum_{k=1}^m \lambda_k^j u_{j-k} + \bar{u}_j \quad (3)$$

取欧氏范数有

$$\|\bar{u}_j\| = \min_{\lambda_1, \dots, \lambda_m} \|u_j - \sum_{k=1}^m \lambda_k^j u_{j-k}\| \quad (4)$$

向量 $\bar{u}_j$ 称为 u_j 的 m 递归补。由变分式(4)求解 λ_k 是常规的最小二乘法。若向量组(2)线性相关,解 λ_k 并不唯一。不过递归补 $\bar{u}_j$ 总是唯一的。使 λ_k 唯一的算法见 1.3.4 节。

唯一解 $\lambda_k^j \quad k=1, 2, \dots, m$ 称为 u_j 的递归坐标或演化坐标。称

$$\Lambda_j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_m^j)^T \quad (5)$$

$$\bar{\Lambda}_j = \sum_{k=1}^m \lambda_k^j u_{j-k} \quad (6)$$

分别为 u_j 的 m 递归向量和 m 递归相似。递归相似是 u_j 在 m 指标的条件下的展开主部。

1.2.1 m 正交列

对(1)作递归分析,若 $j > m$ 有

$$\Lambda_j = 0 \quad \text{或} \quad \bar{u}_j = u_j$$

称(1)为 m 正交列。如取 $m=1$, $u_{2k} = (1, 1)^T$, $u_{2k+1} = (1, -1)^T$ 。此时,(1)是一正交列,但另取 $m=2$,则 $\bar{u}_j = 0$, $\Lambda_j = (0, 1)^T$ 。

m 正交列是指在指标 m 下不能分析的序列。

1.2.2 m 递归列

对(1)作 m 递归分析,若 $j > m$,有

$$\bar{u}_j = 0 \quad \text{或} \quad u_j = \Lambda_j$$

称(1)为递归列。不难看出,此时(1)的全部元素 u_j 均落入 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 的生成空间中,这个生成空间的维数 $\leq m$ 。

注意,即便 u_j 是 n 维向量,取 $m > n$,序列(1)也可能并不是递归列。

正交列和递归列是两种特殊的情况。这两个概念均与分析指标 m 有关,以下只好引入一个十分含糊的概念:“适当的 m ”,指

(1)对一个较大的 m ,例如 $m \geq n$, $(\bar{u}_j)$ 为正交列;

(2)或者,对容许的误差限 $\epsilon > 0$,对指标 m 有

$$\|\bar{u}_j\| \leq \epsilon \quad (j > m) \quad (7)$$

若被分析的序列(1)仅有有限长度,那么上述两种情况之一必会出现。当然,若 $m=N$, N 为(1)的长度,这种分析无甚意义。

顺便说明,若(1)是 m 递归列,此时递归向量列

$$\Lambda_{m+1}, \Lambda_{m+2}, \dots \quad (8)$$

相当于在初值 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 下的半群表示。

1.2.3 跃度

递归相似和递归补是在欧氏范数下定义的,因此

$$\|u_j\|^2 = \|\bar{\Lambda}_j\|^2 + \|\bar{u}_j\|^2 \quad (9)$$

定义序列在时刻 j 处的 m 跃度为

$$h_j^m = \frac{\|\bar{u}_j\|}{\|u_j\|} \quad (10)$$

递归列处处有 $h^m = 0$,正交列处处有 $h^m = 1$ 。因为 $\|\bar{u}_j\| \leq \|u_j\|$

$$0 \leq h_j^m \leq 1$$

序列(1)各点的跃度是各点演化奇异性的指标。

1.3 演化相关

现在转而考虑递归向量列(8),事前请注意以下事实

(1)向量 u_j 与 Λ_j 含意不同(两者的关系犹如函数与其导数、函数与其傅氏变换的象函数的关系)。

(2)不论 u_j 是何种内容(实向量或实函数), Λ_j 总是 m 维实向量。

(3)如果继续对 (Λ_j) 列重复作递归分析,其结果相当于对 (u_j) 作指标为 $2m$ 的递归分析。

两个同维数实向量的相关运算记作

$$\{V_1, V_2\} = \frac{(V_1, V_2)}{\|V_1\| \|V_2\|} \quad (11)$$

1.3.1 演化相关系数

序列(1)在 k, l 两处的 m 演化相关系数定义为

$$P_{k,l}^m = \{\Lambda_k, \Lambda_l\} \quad (12)$$

这个数值是序列(1)在 k, l 处演化动态相似性的度量。而常义的相关系数 $\{u_k, u_l\}$ 是静态相似性的度量。两者并没有必然的相依关系。

1.3.2 演化互相关

两个序列 (u_j) 和 (v_j) , 它们可能表示不同的物理过程, u_j, v_j 可能是类型不同的向量,因此常义的相关计算没有意义。但是,它们的演化情况确可以比较。若它们在同一指标 m 下各作递归分析

$$(u_j) \rightarrow (\Lambda_j), \quad (v_j) \rightarrow (\Gamma_j) \quad j > m$$

定义它们的演化互相关系数

$$q_{k,l}^m = \{\Lambda_k, \Gamma_l\} \quad (13)$$

在应用中,演化互相关也许比演化自相关更有价值。

1.3.3 递归分析和自然正交分解

两者有极大的相似之处。两者都是从被考查的一组对象中寻找表现对象的方法。更确切地说,递归分析是一个内容更具体的框架,表示 u_j 只能利用 u_j 身前的部分向量 $u_{j-1}, \dots, u_{j-m}$ 。而自然正交分解则没有特定的限制。

若把自然正交分解方法套用到递归分析的框架中,则可以给出演化坐标,即递归坐标的另一种定义。不过从整体上看,它们的效果是等价的。

回顾自然正交分解的几何意义,对一组向量作自然正交分解

$$A: V_1, V_2, \dots, V_m \quad (14)$$

是指由 A 作出一组单位正交向量 B

$$B: \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m_1} \quad (15)$$

粗略地说, φ_1 与组 A 中 m 个向量最为相似,在正交 φ_1 的向量中, φ_2 与组 A 最为相似,类推说明其它向量 φ_i 。这里 $m_1 \leq \min(n, m)$, m_1 是 A 中极大无关组中向量的个数。

如果取(2),即向量组 $u_{j-1}, \dots, u_{j-m}$, 对它作自然正交分解,并得到正交组 B , 那么将有唯一的表示

$$u_j = \sum_{k=1}^m \mu_k' \varphi_k + \bar{u}_j \quad (16)$$

其中 $\mu'_k = (\varphi_k, u_j)$ $k \leq m_1$, $\mu'_k = 0$ $k > m_1$, m_1 是(2)中无关组中向量的个数。易知, (16)与(3)中 $\bar{u}_j$ 是同一个向量。由(3)(4)定义的递归相似总有

$$\bar{A}_j = \sum_{k=1}^m \lambda'_k u_{j-k} = \sum_{k=1}^m \mu'_k \varphi_k$$

因此, μ'_k $k = 1, 2, \dots, m$ 也可以定义作 u_j 的演化坐标。这种定义的优点是 μ'_k 唯一。而由(3)、(4)定义的 λ_k 却有鲜明的演化形象。

1.3.4 使 λ_k 唯一的算法

如果向量组(2) $u_{j-1}, \dots, u_{j-m}$ 线性无关, 则由(4)可唯一算出 λ_k 。为了使 λ_k 唯一确定, 旨在对(2)进行清理, 保留(2)的极大无关组。

清理必须从 u_{j-1} 开始, 若 u_{j-1} 与 u_{j-2} 相关, 又 u_{j-1} 为非零向量, 则舍去 u_{j-2} , 保留 u_{j-1} 。若 u_{j-1} 与 u_{j-2} 无关, 它们同时保留。继而用 u_{j-3} 与保留向量比较, 直到全部向量比较完毕。

凡在清理中舍去的向量, 它们所对应的递归坐标 $\lambda = 0$, 此后按(4)计算保留向量所对应的递归坐标。

实际计算中即便(2)是无关组仍有可能使(4)出现“病态性”, 为此在作清理过程中, 应同时舍去那些近乎相关的向量。舍去的顺序同前述。

2 应用

这里构想几种应用的模型。

(1)单一的数量序列, 如某点的温度序列。

(2)多数量序列, 如

$$(x) \quad x_1, x_2, \dots, x_j, \dots$$

$$(y) \quad y_1, y_2, \dots, y_j, \dots$$

此时, 它们可作出一个向量序列(1), 其中 $u_j = (x_j, y_j)^T$ 。

(3)单一的要害场序列, 如某区域上的高度场, 等压面上的散度场或涡度场等。 $\varphi = \varphi(x)$, $x = (x, y)$ 。 φ 为多元函数

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_j \quad \dots$$

因为测值(或计算值)仅在网格点上, 所以 φ 可以看成维数甚高的向量。直接作递归分析, 算法困难。

(4)同一区域或不同区域上的多个要素场序列。

除上述问题(2), 其他都必须化成可以方便作递归分析的形式。这种转化必须保持一定的物理或数学意义。

稍加考虑将会发现, 可供转化的方法是多样的, 特别是某些方法不但简便而且能丰富分析的内容。详细的内容待另文讨论。

以下仅以函数为例(极易变成序列问题)说明本文的想法。

2.1 函数及其“邻域函数”

由函数 $u(t)$ 可以产生许多有明显意义的新函数

$$w_0(t) = u(t), \quad w_1(t) = u'(t), \quad w_2(t) = u''(t)$$

$$w_3(t) = u^2(t), \quad w_4(t) = \int_0^\infty \rho(t, s) u^2(s) ds, \quad \dots$$

其中 $\rho(t, s)$ 是一个适当的权函数或窗函数。除 w_0 、 w_3 外, 其他函数都刻画了 t 点邻域的性质。

因此,它们泛称为“邻域函数”。

向量函数

$$V(t) = (w_0, w_1, w_2)^T$$

不但给出了 $u(t)$ 的值,还给出了 $u(t)$ 微分邻域中的性态。若在 $t = 1, 2, \dots, j, \dots$ 上取值

$$V(j) = (w_0(j), w_1(j), w_2(j))^T = V_j$$

对向量列 (V_j) 作递归分析,远较分析 (u_j) 内容丰富,物理的或数学的意义都是鲜明的。

2.2 递归分析的非线性性、广义递归

形式上,递归分析是一种线性方法。然后它是一种局部的线性方法。整体上看,它有明显的非线性性。

若序列 (u_j) 、 (v_j) 均为递归序列,然后序列 $(u_j + v_j)$ 一般不再是递归序列了。又如 $u = (x_1, x_2)^T$, $v = (y_1, y_2)^T$, 令 $w = (x_1, x_2, y_1, y_2)^T$, 若 (u) 、 (v) 为递归序列, (w) 一般并不是递归序列。

由此可以推广递归分析的概念,这种推广有一定的潜在意义。

称 (u_j) 是广义递归序列,若有 p 个非零的 m 递归序列

$$(\alpha_j), (\beta_j), \dots$$

并且有 $u_j = \alpha_j + \beta_j + \dots$, 即 $(u_j) = (\alpha_j + \beta_j + \dots)$ 。此时,又称 (u_j) 为 P 重递归列。本文前述的递归列是单重的递归列,是广义递归列的特殊情况。

选定指标 m 后,对非单重递归列 (u_j) 作 $P = 2$ 的广义递归分析,是构造两个 m 递归列 (α_j) 、 (β_j) 并使之

$$\max_j \max_{(\alpha), (\beta)} \|u_j - (\alpha_j + \beta_j)\| = \epsilon$$

极大值 ϵ 也是 (u_j) 演化的指标,此值必然是存在唯一的。然而,这样定义的 (α_j) 、 (β_j) 并不唯一。为克服这种困难,广义递归的定义有待进一步研究。不过,可以想象广义递归分析将是讨论非线性演化的一个有希望的途径。

3 小 结

(1)递归分析的基本意义是寻求向量列的演化特征。

(2)最基本的概念是递归坐标、递归相似和递归补。

(3)演化自相关和演化互相关系数是动态比较。

(4)递归分析是局部线性化方法,整体上具有非线性性。

(5)递归分析与自然正交分解方法既相似,又相异。递归分析的目的比后者具体。

(6)广义递归分析值得重视。

(7)递归分析的另种推广是转而考虑多元函数 $u(t, x) \quad t \geq 0$ 。这将是一个数学分析上的问题了。

参 考 文 献

- 1 R 柯朗, D 希尔伯特著. 数学物理方法: 卷 I. 钱 敏, 郭敦仁译. 北京: 科学出版社, 1958. 38~88
- 2 M P do Carmo 著. 曲线和曲面的微分几何学. 田畴等译. 上海: 上海科学技术出版社, 1988. 1~49, 214~309
- 3 张锦炎, 钱 敏. 微分动力系统导论. 北京: 北京大学出版社, 1991. 1~37

RECURSIVE SIMILARITY

Liu Guifu

(Department of Basic Courses, NIM, 210044, Nanjing, PRC)

Abstract This paper is devoted to a dynamic model for observational study, which does not depend on statistical concept nor on any a priori theoretical model of the object. Consequently, it pocesses great generality. Recursive similarity is the central concept of the research, resulting from which are neighborhood function, jumping, evolution similarity and calculable index, responsible for describing the evolution properties of the observational sequence. As a target, the reconstruction of a dynamic system based on an observational (vectorial or functional) series and the article is only part of the research towards the goal.

Keywords recursive similarity, dynamic system, activity frame