第19卷第1期 南京气象学院学报 Vol. 19 No. 1
1996年3月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Mar. 1996

JM模型中参数的Bayes估计

秦伟良
(南京气象学院基础科学系,南京 210044)

摘 要 讨论了软件可靠性模型——JM模型中故障率比例参数 θ 的Bayes估计问题,分别求出了在贝叶斯假设、杰弗莱原则和共轭分布原则下参数 θ 的先验分布、后验分布及相应的Bayes估计,并对它们进行了比较和讨论。

关键词 JM模型,故障率Bayes估计,Bayes假设,杰弗莱原则,共轭分布

分类号 O212

Z Jelinski和P Moranda[1](1972)提出了如下软件可靠性数学模型,该模型假设:

(1)软件中的初始错误个数为一个未知但固定的常数,用 N_0 表示;

(2)错误一旦被查出即被完全排除,于是每次排错后,错误数就要减去1;

(3)任何时候的故障率都与软件中剩余错误个数成正比,正比常数用 θ 表示。

由以上假设,在开始时故障率为 $\theta[N_0]$,排除一个错误后,故障率为 $\theta[N_0-1]$,以此类推。设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示相继出现的错误之间的时间区间样本,则 x_i 有密度为

$$p(x_i)=\theta[N_0-(i-1)]\exp\{-[N_0-(i-1)]x_i\} \tag{1}$$

在 θ、N_0 已知时,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相互独立,该模型就简称为JM模型。本文主要讨论JM模型中,故障率比例参数 θ 的Bayes估计问题,分别求出了在贝叶斯假设、杰弗莱原则和共轭分布原则下参数 θ 的先验分布、后验分布及其相应的Bayes估计,并对它们进行了比较和讨论。

Bayes方法认为,在进行试验或观测得到样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之前,人们对未知参数 θ 含有一些知识,这些知识可以是某种理论、以往的经验、或是观测者的主观认识等。即将未知参数 θ 看成随机变量(或向量),从而给出它的一个概率分布 $\pi(\theta)$ 称之为参数的先验分布。于是当 θ 已知时,样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的联合分布密度 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ 就看成是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对 θ 的条件分布密度,记为 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)$。对于JM模型,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对参数 θ 的条件密度即为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)=\theta^n\prod_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]\exp\{-\theta\sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]x_i\} \tag{2}$$

由Bayes公式就可求得 θ 对样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的条件分布密度,记为 $h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称之为后验分布,且有

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\pi(\theta)\ p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)}{\int\pi(\theta)p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)\mathrm{d}\theta} \tag{3}$$

依据后验分布就可对参数 θ 作出估计和推断。

由此可见,参数的先验分布的选取是贝叶斯方法的核心问题,对于如何选取先验分布有多

收稿日期:1995-05-16;改回日期:1995-09-20

种原则和方法，贝叶斯假设、杰弗莱原则、共轭分布原则就是几种最常用又很有效的原则。当分布确定后，对参数常用条件期望估计，即

$$\hat{\theta} = E(\theta|x) \tag{4}$$

为了处理方便引入分布密度的核的概念。

定义1 设 $f(x)$ 是某随机变量 X 的分布密度，若 $f(x) = cg(x)$，c 是与 x 无关的常数，$g(x)$ 是与 x 有关的部分，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的核。记为

$$f(x) \propto g(x) \tag{5}$$

1 Bayes 假设下 θ 的估计

所谓 Bayes 假设是指当对参数无信息时，参数 θ 的先验分布应在 θ 的取值范围内是“均匀”分布(包括广义的先验分布). 即以 1 为核

$$\pi(\theta) \propto 1 \tag{6}$$

定理1 在贝叶斯假设下，JM 模型中参数 θ 的先验分布应以 1 为核，后验分布为以 $n+1$ 和 T 为参数的 Γ-分布，即 $\Gamma(n+1,T)$

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{T^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\theta^n\exp(-T\theta) \qquad \theta \geqslant 0 \tag{7}$$

参数 θ 的条件期望估计为

$$\hat{\theta} = \frac{n+1}{T} \tag{8}$$

其中，$T = \sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]x_i$。

证明 由 $\pi(\theta) \propto 1$ 及(3)得

$$\begin{aligned} h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n) &\propto p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta) \\ &\propto \theta^n\prod_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]\exp\{-\theta\sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]x_i\} \\ &\propto \theta^n\exp\{-T\theta\} \end{aligned}$$

由 Γ-分布的性质知 $h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 就是以 $n+1$ 和 T 为参数的 Γ-分布，且其条件期望为 $(n+1)/T$，由此定理得证。

2 杰弗莱原则下 θ 的 Bayes 估计

在贝叶斯假设中，如果对参数 θ 选用均匀分布，那么对 θ 的函数 $g(\theta)$ 作参数是否也选用均匀分布，这往往会导致矛盾。因为若 θ 服从均匀分布，则 $g(\theta)$ 未必也服从均匀分布，杰弗莱原则则克服了这一矛盾。杰弗莱原则认为一个合理的决定先验分布的准则应具有如下不变性：按照准则决定 θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$，对 θ 的函数 $g(\theta)$ 作参数按照同一准则决定 $\eta = g(\theta)$ 的先验分布是 $\pi_g(\eta)$，则应有关系式

$$\pi(\theta) = \pi_g(\theta)|g'(\theta)| \tag{9}$$

若记 $I(\theta)$ 表示参数 θ 的 Fisher 信息量

$$I(\theta) = E[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)]^2 \tag{10}$$

则杰弗莱得到了如下结论。

定理2 若 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ 以 Fisher 信息量 $I(\theta)$ 之平方根为核，即

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{|I(\theta)|} \tag{11}$$

则以该准则决定的先验分布具有杰弗莱不变性[3]。

定理 3　JM 模型中参数 θ 的 Fisher 信息量 $I(\theta) = n/\theta^2$ 。在杰弗莱原则下，θ 的先验分布以 $1/\theta$ 为核，即 $\pi(\theta) \propto 1/\theta$ 。后验分布为以 n 和 T 为参数的 Γ-分布 $\Gamma(n,T)$

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{T^n}{\Gamma(n)}\theta^{n-1}\exp(-T\theta) \qquad \theta \geqslant 0$$

其条件期望估计为

$$\hat{\theta} = \frac{n}{T}$$

且恰为 θ 的极大似然估计。

证明　对(2)式取对数并对 θ 求偏导数得

$$\ln p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta) = n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}\ln[N_0-(i-1)] - \theta\{\sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]x_i\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]x_i \tag{12}$$

由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 相互独立，且 x_i 服从指数分布得

$$E(x_i) = \frac{1}{\theta}[N_0-(i-1)]$$

$$\mathrm{Var}(x_i) = \frac{1}{\{\theta[N_0-(i-1)]\}^2}$$

∴

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= E[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)]^2 \\
&= E\{\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]x_i\}^2 \\
&= E\sum_{i=1}^{n}\{[N_0-(i-1)]x_i - \frac{1}{\theta}\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}E\{[N_0-(i-1)]x_i - \frac{1}{\theta}\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]^2E\{x_i - \frac{1}{\theta}[N_0-(i-1)]\}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]^2\mathrm{Var}(x_i) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]^2}{\{\theta[N_0-(i-1)]\}^2} = \frac{n}{\theta^2}
\end{aligned}$$

∴ θ 的先验分布为

$$\pi(\theta) \propto \sqrt{|I(\theta)|} \propto \theta^{-1}$$

由(3)式得 θ 的后验密度为

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n) \propto \theta^{-1}\theta^n\prod_{i=1}^{n}[N_0-(i-1)]\exp(-T\theta) \propto \theta^{n-1}\exp(-T\theta)$$

由 Γ-分布知

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{T^n}{\Gamma(n)}\theta^{n-1}\exp(-T\theta)\qquad\theta\geqslant 0$$

$$\therefore\qquad\hat{\theta}=\frac{n}{T}$$

由(12),令其右端等于零即得 θ 的极大似然估计也为 n/T 。定理得证。

3 共轭分布原则下 θ 的 Bayes 估计

定义 2 设样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 对参数 θ 的条件分布为 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)$,$\theta$ 的先验分布 $\pi(\theta)$被称为 $p(x_1,x_2,\cdots,x_n|\theta)$的共轭分布,如果 $\pi(\theta)$ 决定的后验分布密度 $h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\pi(\theta)$是同一类型的。

定理 4 若 θ 为以参数为 k 和 r 的 Γ-分布为先验分布,$\theta\sim\Gamma(k,r)$,即有密度

$$\pi(\theta)=\frac{r^k}{\Gamma(k)}\theta^{k-1}\exp(-r\theta)\qquad\theta\geqslant 0$$

则其后验分布为以参数 $n+k$ 和 $r+T$ 为参数的 Γ-分布 $\Gamma(n+k,r+T)$

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{(r+T)^{n+k}}{\Gamma(n+k)}\theta^{n+k-1}\exp[-(r+T)\theta]\qquad\theta\geqslant 0$$

所以 ,Γ-分布是其共轭分布。因而在共轭分布原则下 θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}=\frac{n+k}{T+r}$$

证明 由(3)式得

$$\begin{aligned}h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)&\propto\theta^{k-1}\exp(-r\theta)\theta^n\exp(-T\theta)\\&\propto\theta^{n+k-1}\exp[-(r+T)\theta]\end{aligned}$$

即 $h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之核为 $\theta^{n+k-1}\exp[-(T+r)\theta]$ 。

由 Γ-分布得 θ 后验密度为

$$h(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{(r+T)^{n+k}}{\Gamma(n+k)}\theta^{n+k-1}\exp[-(T+r)\theta]\qquad\theta\geqslant 0$$

由此得在共轭分布原则下,参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}=E(\theta|x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{n+k}{r+T}$$

定理得证。

如果把先验分布看成是以前知识的总结,那么当抽得一定容量的样本,获得一定的经验以后,对参数的分布就有了进一步的了解,从而得到后验分布。由共轭分布原则知,在共轭分布原则下,后验分布只是对先验分布的参数作进一步的修改。因此,共轭分布原则也是一个合理的准则,其统计意义非常明确。

4 讨 论

由前面的结论得到了 JM 模型中的参数 θ 分别在贝叶斯假设,杰弗莱原则和共轭分布原则下的 Bayes 估计为

$$\hat{\theta}_1=\frac{n+1}{T},\quad\hat{\theta}_2=\frac{n}{T},\quad\hat{\theta}_3=\frac{n+k}{r+T}$$

(1) 这 3 个估计量中 $\hat{\theta}_2$ 就是其极大似然估计,当 n 充分大时,$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_3$ 也和其极大似然估计近似。

(2)对于在共轭分布原则下的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_3$ 有:当 $r = 0, k = 0$ 时,$\hat{\theta}_3$ 就是 $\hat{\theta}_2$;当 $r = 0$,$k = 1$ 时,$\hat{\theta}_3$ 就是 $\hat{\theta}_1$。

(3) $\hat{\theta}_3$ 又可改写为

$$\hat{\theta}_3 = \frac{n+k}{r+T} = \frac{r}{r+T}\frac{k}{r} + \frac{T}{r+T}\frac{n}{T}$$

若把 k/r 作为 θ 的先验估计,而 n/T 是其后验估计,则 $\hat{\theta}_3$ 恰好为两者的加权平均,权重分别为 $r/(T+r)$ 和 $T/(T+r)$。

(4)总结以上结论可见,当用 Bayes 方法对 JM 模型中的参数 θ 作估计时,Γ-分布是它的一个合理的先验分布。

参　考　文　献

1 Jelinski Z, Moranda P B. Software reliability research. In: Freiberger W, eds. Statistical computer performance evaluation. New York: Academic Press, 1972

2 徐仁佐,谢　旻,郑人杰. 软件可靠性模型及其应用. 北京:清华大学出版社,1994

3 张尧庭,陈汉峰. 贝叶斯统计推断. 北京:科学出版社,1991

4 茆诗松,王玲玲. 可靠性统计. 上海:华东师范大学出版社,1994

ON BAYES ESTIMATION OF PARAMETER θ IN JM MODEL

Qin Weiliang

(Department of Basic Courses, NIM, Nanjing　210044)

Abstract　Study is made of Bayes estimation of the error rate proportionality parameter θ in the JM model for testing software reliability, leading to the a priori, a posteriori distribution of θ and the coresponding Bayes estimates on the Bayes assumption, Jeffrey's principle and conjugate distribution, together with their comparison and discussion.

Keywords　JM model, Bayes estimation of error rate, Bayes estimation, Jeffrey principle, conjugate distribution.