第 24 卷第 2 期　　南京气象学院学报　　Vol. 24 No. 2
2001 年 6 月　　Journal of Nanjing Institute of Meteorology　　Jun. 2001

关于伴随同化方法的误差分析

费文龙[1], 朱克云[2], 吴诚鸥[1], 吕　红[1]
(1. 南京气象学院数学系, 南京　210044; 2. 成都气象学院气象系, 成都　610000)

摘要: 用概率统计理论证明了伴随同化方法的初始估计的优良性, 给出评估伴随同化方法效果的指标及其简单算法, 并用随机模拟验证。

关　键　词: 伴随同化, 误差分析, 随机模拟
中图分类号: O174. 5　文献标识码: A　文章编号: 1000-2022(2001) 02-0237-05

气象资料同化的重要性是众所周知的。从数学上来看, 同化方法主要分为概率统计方法(如 Kalman 滤波) 和确定性方法(如伴随同化) 两类。由于气象观测资料特别是卫星和雷达反演资料, 均存在一定观测误差。而四维同化, 从本质上讲是使客观分析场趋于一种最优的状态, 这种状态使观测、分析、预报和初值之间的偏差达到最小[1]。因而, 无论是用概率统计方法还是用确定性方法, 四维同化的结果必然带有随机性。所以, 从概率统计的观点, 给出同化结果的误差分析是很有必要的。

伴随同化方法是一种极为重要的同化方法, 它能把对气象资料的多次观测值与大气动力学模式结合起来, 求出初始场真实值的较精确的估计, 也能在多个时段上使估计值适应模式。本文将从理论上证明这种估计值比观测值更精确。

本文用概率统计理论[2~5] 证明: 伴随同化方法所得初始场估计值减少了误差, 伴随方法所得初始场估计是无偏的, 观测资料越长, 效果越好。并且给出初始场估计优良性的指标——R_{PC}, 证明它仅由模式及初值(即模型实际值) 决定。论文还通过数值模拟证实了这一点。

1　数学模型

为了叙述方便, 只考虑二维情形, 三维情形原理是一样的。

设对于平面上坐标为(x, y)的点在 t 时刻的部分气象资料(温度、湿度、风速、位势、…) 形成 p 维向量 $\boldsymbol{u}(t, x, y)$, 它满足方程

$$\frac{\boldsymbol{u}}{t} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) 。\tag{1}$$

由于观测资料是离散的, 设观测时刻为 $s\ \ t, s = 0, 1, \cdots, N$。观测地点为$\{ (x_i, y_j)\ \ i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n\}$, 令

收稿日期: 2000-08-25; 修订日期: 2000-11-15
基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040910; 国家自然科学基金项目 49575269; 省教育厅第二批高教科研项目 00KJD110002
作者简介: 费文龙, 男, 1976 年 8 月生, 学士

$$\boldsymbol{Y}(s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}(s \quad t, x_1, y_1) \\ \boldsymbol{u}(s \quad t, x_1, y_2) \\ \\ \boldsymbol{u}(s \quad t, x_m, y_n) \end{pmatrix}。$$

将(1)式中微商化为差商后可得

$$\frac{\boldsymbol{u}((s+ \quad 1) \quad t, x_i, y_j) - \quad \boldsymbol{u}(s \quad t, x_i, y_j)}{t} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}(s \quad t, x_i, y_j))。$$

写成向量形式即是

$$\boldsymbol{Y}(s+ \quad 1) - \quad \boldsymbol{Y}(s) = \quad t \quad (s, \boldsymbol{Y})。 \qquad (2)$$

令 $\boldsymbol{Y}_o(s)$ 为观测值, $\boldsymbol{Y}_a(s)$ 为精确值, $\boldsymbol{Y}_e(s)$ 为估计值, 误差

$$(s) = \quad \boldsymbol{Y}_o(s) - \quad \boldsymbol{Y}_a(s)。 \qquad (3)$$

我们做两种考虑[4,5]。

1) 加法误差模型, 即误差与观测值大小无关,

$$(s) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} & & 0 \\ & \boldsymbol{c} & \\ 0 & & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \quad (s)。$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是 p 阶方阵, $(s) \sim \boldsymbol{N}(0, I_{mnp})$ 。

2) 乘法误差模型, 即误差与观测值成比例, $(s) = \quad \boldsymbol{Y}_a(s) \# \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} \quad (s) \right)$。其中“#”是乘积符号, 表示矩阵对应元素相乘。由于 $\boldsymbol{Y}_a(s)$ 变化不大时, 乘法误差模型可以近似看成加法误差, 因此我们主要研究加法误差模型。

模型中待估的参数是初始场 $\boldsymbol{Y}_a(0)$, 是以非线性形式出现的, 所以此模型属于非线性统计模型, 又因其分量个数 mnp 很大, 一般都在数千以上, 与常规非线性统计模型不同[2~5], 可称为大规模非线性统计模型。常规非线性统计模型的计算方法不适用, 但大多数理论还是适用的。下文 3 节中我们将以非线性统计模型的方法讨论伴随同化模型。以下 E 表示数学期望, D 表示方差。

2 伴随同化过程

目标函数为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{N} [\boldsymbol{Y}(s) - \quad \boldsymbol{Y}_o(s)] \boldsymbol{W} [\boldsymbol{Y}(s) - \quad \boldsymbol{Y}_o(s)]。 \qquad (4)$$

其中, $\boldsymbol{W}$ 是对称权矩阵, 气象学家常取 $\boldsymbol{W}$ 为对角阵。为了使 $\boldsymbol{H}$ 尽量小, 对(2)式扰动得

$$\boldsymbol{Y}(s+ \quad 1) = \quad \boldsymbol{Y}(s) + \quad t \frac{}{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{Y}(s) \quad \boldsymbol{F}(s) \quad \boldsymbol{Y}(s)。$$

反复迭代得

$$\boldsymbol{Y}(s+ \quad 1) = \boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{F}(s- \quad 1)\cdots\boldsymbol{F}(0) \quad \boldsymbol{Y}(0), \quad s = 1, 2, \cdots, n。 \qquad (5)$$

将(4)式扰动得

$$\boldsymbol{H} = \sum_{s=0}^{N} [\boldsymbol{Y}(s) - \quad \boldsymbol{Y}_o(s)] \boldsymbol{W} \quad \boldsymbol{Y}(s)。$$

将(5)式代入上式得

$$\boldsymbol{H}=\sum_{s=0}^{N}[\boldsymbol{Y}(0)]'\boldsymbol{F}'(0)\cdots\boldsymbol{F}'(s-1)\boldsymbol{W}[\boldsymbol{Y}(s)-\boldsymbol{Y}_{o}(s)]。\tag{6}$$

由此可见 $\boldsymbol{H}$ 的梯度为

$$\boldsymbol{H}=\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{F}'(0)\cdots\boldsymbol{F}'(s-1)\boldsymbol{W}[\boldsymbol{Y}(s)-\boldsymbol{Y}_{o}(s)]。\tag{7}$$

由 $\boldsymbol{Y}(0)$ 的适当初值出发得到 $\boldsymbol{Y}(s)$ 的预报值(向前积分), 再由(6)式向后积分求得梯度, 搜索使 $\boldsymbol{H}$ 下降。迭代若干次后收敛, 即得到了 $\boldsymbol{Y}(0)$ 的估计值 $\boldsymbol{Y}_{e}(0)$。

3　共轭同化效果的一个指标

为了估计共轭同化的效果, 我们很自然定义指标

$$R_{PC}=\frac{\overline{[\boldsymbol{Y}_{o}(0)-\boldsymbol{Y}_{a}(0)]'\boldsymbol{W}[\boldsymbol{Y}_{o}(0)-\boldsymbol{Y}_{a}(0)]}}{[\boldsymbol{Y}_{e}(0)-\boldsymbol{Y}_{a}(0)]'\boldsymbol{W}[\boldsymbol{Y}_{e}(0)-\boldsymbol{Y}_{a}(0)]}\tag{8}$$

来估计同化效果。R_{PC}越大, 效果越好, 但它是随机变量, 具有不确定性。我们将证明这种不确定性可以忽略不计。

为了得到(8)式的理论值, 我们在 $\boldsymbol{Y}_{a}(0)$ 附近将 $\boldsymbol{Y}(s)$ 线性展开,

$$\boldsymbol{Y}(0)\approx\boldsymbol{B}(0)\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{b}(0);\boldsymbol{Y}(1)\approx\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{b}(1);\cdots;\boldsymbol{Y}(N)\approx\boldsymbol{B}(N)\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{b}(N)。$$

其中, $\boldsymbol{b}(0)=0$; $\boldsymbol{B}(0)$ 是 mnp 阶单位矩阵; $\boldsymbol{B}(s)$ 是 mnp 阶常数矩阵, $\boldsymbol{b}(s)$ 是 mnp 维常数向量。$\boldsymbol{H}$ 极小近似等价于

$$\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N}[\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{b}(s)-\boldsymbol{Y}_{o}(s)]'\boldsymbol{W}[\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{b}(s)-\boldsymbol{Y}_{o}(s)]$$

极小, 由此可得

$$\boldsymbol{Y}_{e}(0)=\left[\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{B}'(s)\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}(s)\right]^{-1}\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{B}'(s)\boldsymbol{W}[\boldsymbol{Y}_{o}(s)-\boldsymbol{b}(s)]。\tag{9}$$

由(9)式立得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}_{e}(0))=\boldsymbol{Y}_{a}(0)。\tag{10}$$

(10)式说明以下结论。

结论 1　伴随方法所得初始场估计是无偏的。

由(9)式可得

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}_{e}(0))=\left[\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{B}'(s)\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}(s)\right]^{-1}\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{B}'(s)\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}(\ (s))\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}(s)\left[\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{B}'(s)\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}(s)\right]^{-1}。\tag{11}$$

许多伴随同化论文实际上假设 $\boldsymbol{D}(\ (s))$ 是对角阵, $\boldsymbol{W}=[\boldsymbol{D}(\ (s))]^{-1}$, 因而

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}_{e}(0))=\left[\sum_{s=0}^{N}\boldsymbol{B}'(s)\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}(s)\right]^{-1}<\boldsymbol{W}^{-1}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Y}_{o}(0))。$$

由此可得:

结论 2　$\boldsymbol{Y}_{e}(0)$ 的方差小于 $\boldsymbol{Y}_{o}(0)$ 的方差, 即伴随同化方法有减少误差的作用。

结论 3　随着 N 的增大 $\boldsymbol{Y}_{e}(0)$ 的方差变小, 因而观测资料越长, 同化效果越好。

由于矩阵大小的比较不能直观给出误差减少的量化估计, 并且高阶矩阵计算极麻烦, 我们对(8)式所定义的 R_{PC}加以讨论。

由于

$$W = [D((s))]^{-1} = \begin{pmatrix} c \quad c' & & 0 \\ & & \\ 0 & & c \quad c' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (c')^{-1} \quad c^{-1} & & 0 \\ & & \\ 0 & & (c')^{-1} \quad c^{-1} \end{pmatrix},$$

由大数定律知当 mnp 趋于∞时 $\frac{'(0) \quad (0)}{mnp}$ 趋于 1, 而实际上 mnp 确实很大(一般总在数千以上), 所以

$$\frac{1}{mnp}[Y_o(0) - Y_a(0)]'W[Y_o(0) - Y_a(0)] \approx 1。$$

另一方面,

$$[Y_e(0) - Y_a(0)]'W[Y_e(0) - Y_a(0)] =$$

$$\{[\sum_{s=0}^{N} B'(s)WB(s)]^{-1}\sum_{s=0}^{N} B'(s)WB(s) \quad (s)\}'W\{[\sum_{s=0}^{N} B'(s)WB(s)]^{-1}\sum_{s=0}^{N} B'(s)WB(s) \quad (s)\}$$

$$D' 。$$

其中 $' = (\ '(0), \ '(1), \cdots, \ '(N))$, D 是正定阵。

由于 (i) 相互独立, $D = G' G$, 其中 G 是正交阵, 是对角阵, 当 中元素不很大时, 由切比雪夫不等式

$$\frac{1}{N \quad mnp}[Y_e(0) - Y_a(0)]'W[Y_e(0) - Y_a(0)] \approx \frac{\mathrm{tr}}{N \quad mnp}$$

可得:

结论 **4** 当 mnp 很大时, 系数 R_{PC} 由模式及初值(即模型实际值)决定。

4 实 例

我们以文献[6]中介绍的浅水模型为例, 计算方法用有限元法, 取 $m= 15$, $n= 12$, 在 N 取 5、10、15、20 时比较同化结果。在加法误差模型中, 对横向、纵向风速的误差都取为 30× , 为服从 $N(0, 1)$ 的伪随机数, 位势的误差为 1 000× 。对乘法误差模型, 我们取的误差都等于模型精确值×0.1× , 计算结果如下。

(1) 多次模拟表明, R_{PC} 的值只依赖模型和精确初始值, 不同伪随机数模拟出的差异不大。从而验证了结论 4。

(2) 对乘法误差模型, 观察次数与滤波系数如表 1。

表 **1** 乘法误差模型的观察次数与滤波系数

Table 1 Filtering coefficients for different number of obervations in the multiiplication error model

观察次数	5	10	15	20
滤波系数	2.3	2.8	3.4	4.0

由此验证了结论 3。

参 考 文 献:

[1] 王跃山. 客观分析与四维同化[J]. 气象科技, 2000, 28(3): 1～8

[2] 张尧庭, 方开泰. 多元统计分析引论. 第 2 版[M]. 北京: 科学出版社, 1992

[3] MCCULLAGH P, NELDER J A. Generalized linear models. 2nd ed[M]. London: Chapman and Hall, 1989

[4] WEI B. C. Exponential family nonlinear models[M]. Singapore: Springer-Verlag, 1998

[5] RATKOWSKY D A. Nonlinear regression modeling——a unified practical approch[M]. New York: Marcel Dekkel, 1983

[6] ZHU K. Variational data assimilation with a variable resolution finite-element shallow-water equations model[J]. Mon Wea Rev, 1994, 122(5): 946～965

On the error analysis of adjoint assimilation

FEI Wen-long[1], ZHU Ke-yun[2], WU Cheng-ou[1], L Hong[1]

(1. Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044; 2. Department of Meteorology, CIM, Chendu 610000)

Abstract: The advantages of adjoint assimilation to obtain a first estimate field have been theoritically proved with provavility statistics and experimentally verified with ramdomly sampling simulation. The index to evaluate the effectiveness of adjoint assimilation, as well as the method for its calculation are given.

Key words: adjiont assimilation, error analysis, random sample simulating