

文章编号: 1000-2022(2002) 04-0449-06

关于尺度分析的三个问题和尺度分析

廖洞贤¹, 孙 岚²

(1. 国家气象中心, 北京 100081; 2. 中国气象科学研究院, 北京 100081)

摘 要: 对在一些作者中, 在决定时间特征尺度、垂直速度特征尺度和分析高阶微商量级上的分歧进行了讨论, 得出了初步结论。即对于单一尺度的运动, $\tau \sim L/U$ 、 $W \leq mUH/L$ 和 $\partial f / \partial \alpha^n \sim F/L^n$ 。根据讨论结果, 给出了大气几种常用尺度运动的特征尺度的量级。还与中尺度重力波和强对流情况的分析观测结果进行了比较。

关键词: 时间特征尺度; 垂直速度特征尺度; 尺度分析

中图分类号: P253 **文献标识码:** A

1 问题的提出

尺度分析是简化方程、建立模式的重要手段之一。从 20 世纪 40 年代末到现在, 许多人用它研究过大气问题并把它用于大气科学和数值预报中, 如 Charney^[1], Dutton 等^[2], Holton^[3], 曾庆存^[4], 杨大升等^[5], Pielke^[6], 张玉玲等^[7], 叶笃正等^[8], 伍荣生^[9] 和刘式适等^[10]。但是就他们的结果来看, 还有一些分歧, 需要澄清。比如, 不论对大尺度运动或中尺度运动, 很多人都取

$$\tau \sim L/U. \quad (1)$$

但刘式适等^[10]认为: 对于大尺度运动, (1) 式成立; 而对于中小尺度运动, 应取

$$\tau > mL/U. \quad (2)$$

这里 τ 、 U 、 L 各表示时间、水平风速和水平长度的特征尺度; \sim 表示绝对值量级相等; $>_m$ 表示绝对值在量级上大于。

还有, Pielke^[6]认为: $\tau \sim L/C$; 如果变化是由于平流引起的, 则 U 、 V 、 W 可用 C 来表示; 如果波传播是主要的, 则应采用特征群速 \bar{c}_g , 即

$$\tau \sim L/\bar{c}_g. \quad (3)$$

(1)、(2)、(3) 式不同, 这是需待澄清的第 1 个问题。

对于垂直速度特征尺度 W , 很多人根据连续方程得到

$$W \leq mUH/L. \quad (4)$$

其中 $_m$ 表示在量级上小于或等于; H 是垂直厚度的特征尺度。不过, 也有人, 如 Pielke^[6], 却取

收稿日期: 2002-01-14; 改回日期: 2002-03-11

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040911; 国家自然科学基金 40075023

第一作者简介: 廖洞贤(1926-), 男, 四川简阳人, 研究员, 博士生导师, 主要从事数值天气预报和数值模拟的研究。

$$\frac{UH}{WL} \sim 1. \quad (5)$$

(4)、(5) 两式不同, 这是需要澄清的第 2 个问题。

另外, 对于高阶微商 $\partial^n f / \partial \alpha^n \sim F(\partial^n f / \partial \alpha^n) / L^n, n > 1$, 认为只有对于单波, 才有 $\partial^n f / \partial \alpha^n \sim O(1)$, 而对于多波, 则可能不成立^[4]。这是第 3 个问题。

下面, 将对上面提出的 3 个问题进行讨论, 并在绝热无耗散情况下进行大、中尺度运动的尺度分析。

2 时间特征尺度

从(1)式可以看出, 用它所确定的 τ 和用 $\tau = L/U$ 所确定的平流时间不同。前者是 τ 的量级, 而后者却是具体的数。显然, (1) 式所表示的是概量, 是一个范围, 包括平流时间在内。根据 Uccellini 等^[11]对 13 个重力波例子的研究, 重力波的波长在 50 ~ 500 km 之间, 周期在 1 ~ 4 h 之间。由于波长变化范围在中- α 和中- β 尺度之间, 不便取同一的水平长度的特征尺度, 如取水平长度特征尺度为波长的一半, 水平风速特征尺度为 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 而时间特征尺度为周期的一半, 则按(1)式, 时间特征尺度为 $10^3 \sim 10^4 \text{ s}$, 和他们得出的半周期 $1.8 \times 10^3 \sim 7.2 \times 10^3 \text{ s}$ 在量级上一致, 还未达到 $\tau \gg mL/U$ 的程度。

至于(3)式的问题, 根据计算(结果略), 不论是大尺度运动或中尺度运动, 在大多数情况下, 用(1)和(3)式所算的 τ 的量级相等, 因而, 可以认为: (1) 式所包含的结果也包含了(3)式的结果。所以, 作为决定时间特征尺度的关系式, 采用(1)式就可以了。

3 垂直速度的特征尺度

在 $x-z$ 平面上, 二维常定的平流方程可以写成

$$u \frac{\partial A}{\partial x} + w \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

于是, 有

$$\frac{U\bar{A}}{L} u \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{W\bar{A}}{H} w \frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

其中 A 是某一物理量, $A = \bar{A}A$ 。显然, 上式左边第 1 项与第 2 项相平衡需

$$U/L \sim W/H.$$

这说明如方程中只含有平流项, 并且是常定的, 则(5)式成立。不过, 在 A 的水平和垂直变量的特征尺度不相同的情形, 要水平和垂直平流相平衡, 还应有

$$\frac{U\Delta_H \bar{A}}{L} \sim \frac{W\Delta_V \bar{A}}{H}.$$

这时(5)式不成立。这里 $\Delta_H \bar{A}$ 和 $\Delta_V \bar{A}$ 各是 A 的水平和垂直改变量的特征尺度。此外, 当平流不起主导作用, 或除平流外, 还有其他重要作用, 如散度等时, (5)式也可能不成立。

4 高阶微商的尺度分析

令变量 f 的特征尺度为 F , 则

$$\frac{\partial^n f}{\partial \alpha^n} = \frac{F}{L^n} \frac{\partial^n f}{\partial \alpha^n}, \quad n > 1. \quad (7)$$

而

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \sim O(1)。$$

这对于单波是成立的。但是, 对于多波的情况, 如曾庆存^[4]所指出的, 却可能不成立。比如, 当

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{100} \sin(10x)。$$
 (8)

且 $F = 1, L = 1$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x^3} \sim O(10^1)。$$

其所以如此, 是由于 $f(x)$ 包含了两个不同的波的特征尺度和水平长度的特征尺度的缘故。显

然, 不能用一种尺度来表示它们。如果令 $f_1 = \sin x, f_2 = \frac{1}{100} \sin(10x)$, 而 $f = f_1 + f_2$; 再令 $F_1 =$

$$F_1 f_1, f_2 = F_2 f_2, x = \mu_1 L_1 x_1 + \mu_2 L_2 x_2, \text{ 其中 } F_1 = 1, F_2 = \frac{1}{100}, L_1 = 1, L_2 = \frac{1}{10}, \mu_1 = \begin{cases} 1, \text{ 对于 } f_1 \\ 0, \text{ 对于 } f_2 \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 0, \text{ 对于 } f_1 \\ 1, \text{ 对于 } f_2 \end{cases}, \text{ 则有}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = - \frac{F_1}{L_1^3} O(1) - \frac{F_2}{L_2^3} O(1)。$$

所以, 就每项而论, (7) 式仍然适用。但这样做, 对于多波进行尺度分析会变得很烦琐。不过, 在这种情况下, 可以不必逐波分析, 只要把它们分成几个波段, 使每个波段都可以作为一种尺度的波来处理就行了。

5 高度坐标系中特征尺度的量级

考虑在中尺度运动中水平尺度的变化很大, 为了讨论的方便, 下面不再用大、中尺度来进行分类, 而直接用水平长度的特征长度来分, 如 $L \sim 10^6 \text{ m}, L \sim 10^5 \text{ m}$ 等等。

取 $U、H、P、\Delta_z P、\bar{T}、\Delta_z \bar{T}、\Delta_H P、\Delta_H \bar{T}$ 为 $u、z、p、\Delta_z p、T、\Delta_z T、\Delta_H p、\Delta_H T$ 的特征尺度, 其中 $L、H$ 的单位为 m ; U 为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $P、\Delta_H P、\Delta_z P$ 为 hPa ; $\bar{T}、\Delta_z \bar{T}、\Delta_H \bar{T}$ 为 K 。根据一些作者^[3,5]的估计, 其量级各如表 1 所示。

表 1 基本特征尺度的量级

Table 1 Magnitude of basic characteristic scale

	U	H	P	$\Delta_z P$	\bar{T}	$\Delta_z \bar{T}$	$\Delta_H P$	$\Delta_H \bar{T}$
$L = 10^6 \text{ m}$	10	10^4	10^3	10^3	10^2	10^2	10^1	10^1
$L = 10^5 \text{ m}$	10	10^4	10^3	10^3	10^2	10^2	10^0	10^0
$L = 10^4 \text{ m}$	10	10^4	10^3	10^3	10^2	10^2	10^0	10^0

注: 这里只考虑了大气活动深厚的情形。

根据表 1 中的数据, 按 (1)、(4) 式和关系式

$$p \sim \pi H_1 g, \tag{9}$$

$$\Delta_H \pi \sim (\Delta_H P - \pi R \Delta_H \bar{T}) \frac{\pi}{P}。 \tag{10}$$

并取

$$\Delta_z \pi \sim \pi_e \tag{11}$$

可以得到 $t, w, \rho, \Delta_H \rho$ 和 $\Delta_z \rho$ 的特征尺度 $\tau, W, \pi, \Delta_H \pi, \Delta_z \pi$ 等的量级, 如表 2 所示。这里 $H_1 \sim RT/g$, 取 $H_1 \sim 10^4$ m。 τ, W 的单位各为 $s, m \cdot s^{-1}$, $\pi, \Delta_H \pi$ 和 $\Delta_z \pi$ 的单位是 $hPa \cdot s^2 \cdot m^{-2}$ 。不过, 表中 W 的量级, 在 $L = 10^6$ m 时, 考虑 $\partial u / \partial x$ 往往和 $\partial v / \partial y$ 符号相反, 取 $W \sim UH / (10L)$ 。但是, 对于 $L \sim 10^5$ m 的情况, 表 2 中的结果则和有些作者^[5, 10]有出入, 其中主要是 τ 的量级。比如, 前者相对于后者, τ 约小一个量级。其所以如此, 是由于如下事实: 根据张玉玲^[12]和叶家东^[13], 在强对流时, 对流水平尺度为几 km 至十几 km; 其厚度和水平尺度具有同一量级; 其垂直速度平均为几 $m \cdot s^{-1}$, 最大可达 $20 m \cdot s^{-1}$ 以上; 其生命期从几十 min 至 $1 \sim 1.5$ h。因此, 似可认为, 表 2 中的结果和观测结果比较符合。

表 2 导出特征尺度的量级

Table 2 Magnitude of derived characteristic scale

	τ	W	π	$\Delta_H \pi$	$\Delta_z \pi$
$L = 10^6$ m	10^5	10^{-2}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-2}
$L = 10^5$ m	10^4	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-2}
$L = 10^4$ m	10^3	10^0	10^{-2}	10^{-5}	10^{-2}

至于时间变化量的特征尺度, 则取

$$\Delta \bar{A} = \Delta_H \bar{A}. \quad (12)$$

这里 \bar{A} 表示 P, T 或 π 。

6 在气压坐标系中特征尺度的量级

考虑在静力模式中垂直坐标绝大多数都是以气压为基础的坐标, 因此, 下面我们讨论在这种模式中用这种坐标系描写的大气运动的特征尺度, 至少在没有地形起伏的地区, 是恰当的。

6.1 几个关系式

(1) $\Delta_H Z$ 和 $\Delta_z Z$

因为

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p,$$

可以得到

$$(\Delta_H Z)_p \sim \frac{1}{\pi g} (\Delta_H P)_z. \quad (13)$$

这里 $\Delta_H z = \Delta_H Z \times \Delta_H z$ 。至于 $\Delta_z Z$, 和第 5 节类似, 取

$$\Delta_z Z = \Delta_H Z. \quad (14)$$

这里 $\Delta_z z = \Delta_z Z \times \Delta_z z$ 。

(2) \hat{W}

根据连续方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0. \quad (15)$$

令 $\omega = \hat{W} \omega$, 有

$$\hat{W} \omega = \frac{U}{L} \Delta_H P. \quad (16)$$

6.2 特征尺度的量级

如果除 $\Delta_H Z$, $\Delta_V Z$ 和 \hat{W} 外, 其他特征尺度和第 5 节中的相同, 利用(13)、(14)和(16)式, 可以得到表 3。必须说明: 因为 $L = 10^4 \text{ m}$ 的运动已不宜用静力模式描写, 在表中未列入其有关的特征尺度。

表 3 p -坐标系中部分特征尺度的量级

Table 3 Magnitude of characteristic scale in p -coordinates

	$\Delta_V P$	\hat{W}	$\Delta_V Z$	$\Delta_H Z$
$L = 10^6 \text{ m}$	10^3	10^{-3}	10^2	10^2
$L = 10^5 \text{ m}$	10^3	10^{-2}	10^1	10^1

注: 表中 $\Delta_V Z$ 和 $\Delta_H Z$ 的单位是 m , \hat{W} 的单位是 $\text{hPa} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

7 初步结论

根据上面的分析, 对于单一尺度的运动可以初步得到如下结论:

(1) $\tau \sim L/U$; (2) $W \sim MUH/L$; (3) $\partial^m f / \partial x^n \sim F/L^n$ 。

参考文献:

- [1] Charney J G. On the scale of atmospheric motions[J]. Geophys Publikasjoner, 1948, 17(2): 17.
- [2] Dutton J A, Fichtl G H. Approximate equations of motion for gases and liquids[J]. J Atmos Sci, 1969, 26(2): 241-254.
- [3] Holton J R. An Introduction to Dynamic Meteorology[M]. London: Academic Press, 1979.
- [4] 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础[M]. 北京: 科学出版社, 1980: 252-290.
- [5] 杨大升, 刘余滨, 刘式适. 动力气象学[M]. 北京: 气象出版社, 1980: 104-109.
- [6] Pielke R A. Mesoscale Meteorological Modeling[M]. New York: Academic Press, 1984.
- [7] 张玉玲, 吴辉碇, 王晓林. 数值天气预报[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [8] 叶笃正, 李崇银, 王必魁. 动力气象学[M]. 北京: 科学出版社, 1988: 82-92.
- [9] 伍荣生. 大气动力学[M]. 北京: 气象出版社, 1990: 114-121.
- [10] 刘式适, 刘适达. 大气动力学: 上册[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991: 167-173.
- [11] Uccellini L W, Koch S E. The Synoptic setting and possible energy sources for mesoscale wave disturbances[J]. Mon Wea Rev, 1987, 115(3): 721-729.
- [12] 张玉玲. 中尺度大气动力学引论[M]. 北京: 气象出版社, 1999: 21-25; 147-149.
- [13] 叶家东, 李如祥. 积云动力学[M]. 北京: 气象出版社, 1988: 31-36.

Scale Analysis and Its Three Problems

LIAO Dong-xian¹, SUN Lan²

(1. National Meteorological Center, Beijing 100081, China;

2. Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China)

Abstract: On the differences in determining the time and vertical velocity characteristic scales and analyzing high order derivatives suggested by certain authors, discussions are made and preliminary conclusions are drawn, namely, $\tau \sim L/U$, $W \sim UH/L$ and $\partial^n f / \partial x^n \sim F/L^n$, $n > 1$ for a single scale motion. Based upon them the orders of magnitude of several characteristic scales currently used for atmospheric motion are presented, and then compared with the statistical observations in mesoscale gravity wave and severe convection cases.

Key words: time characteristic scale; vertical velocity characteristic scale; scale analysis