

文章编号: 1000-2022(2004) 03-0405-08

## 垂直切变流中非线性重力波及其相互作用

朱利华, 周伟灿, 邹兰军

(南京气象学院 数学系, 江苏 南京 210044)

**摘要:** 利用多重尺度摄动法, 推导出斜压大气中(基本风场具有垂直切变)两个非线性重力波相互作用方程, 这两个方程联立组合为耦合非线性 schrodinger 方程组。两个重力波相互作用时可激发出重力驻波。数值计算表明: 两个孤立重力波相遇, 相追会使波振幅增大, 波宽变窄。强烈对流天气突然爆发的可能原因之一是中尺度重力波非线性相互作用的结果。

**关键词:** 非线性重力波; 耦合 schrodinger 方程组; 包络孤立波; 重力驻波

**中图分类号:** P433 **文献标识码:** A

重力波可能引起各种中小尺度局地环流的突然变化, 包括触发对流性风暴、传输能量和动量等<sup>[1]</sup>, 作为一些特殊强对流天气中波动的重要组成部分, 重力波是人们普遍关注的热点。与大尺度系统不同的是, 中小尺度重力内波是非静力、非地转的, 它不容易将运动方程和热力方程约简为位涡方程来求解, 因此分析重力内波的演变是比较困难的。研究表明<sup>[2-3]</sup>, 中小尺度重力内波波包振幅演变可以约化为非线性立方 schrodinger 方程。在实际大气中, 相向而行的重力波碰撞后可形成大暴雨<sup>[4]</sup>; 重力波的追赶会使波形发生形变<sup>[5-6]</sup>形成飑线。因此从理论上研究两个重力波的非线性演变和相互作用具有重要实际意义。而在大尺度运动中, 国内外学者<sup>[7-12]</sup>研究了各种波的相互作用问题, 得到了很多重要结论。本文则在中小尺度动力框架下研究两个重力波的非线性相互作用问题, 拟在揭示非线性重力波相互作用激发某些重要强对流天气的动力原因。

## 1 基本方程与非线性 schrodinger 方程

为了研究具有重力波特征的暴雨系统的演变过程, 类似文献[1], 把中小尺度原始方程组约化成一个涡度方程, 由此研究具有垂直切变的基本流场中重力内波波包演变情况, 其涡度方程为

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi + \left[ \frac{\alpha \Gamma}{\bar{u}} - \bar{u} \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \psi) = 0. \quad (1)$$

其中,  $\psi$  为对应扰动的流函数,  $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y}$  为 Jacobi 算符,  $\Gamma = \gamma_d - \gamma(\gamma_d = g/c_p$

收稿日期: 2003-06-05; 改回日期: 2003-09-16

基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(G1998040907)

作者简介: 朱利华(1978-), 女, 江苏启东人, 硕士生, 研究方向: 微分方程。

为干绝热递减率,  $\gamma$  为温度场的递减率,  $\alpha = g/T_0$  ( $T_0$  为常数),  $\bar{u} = \frac{d^2\bar{u}}{dz^2}, \dots^2 = \frac{\partial^2}{\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\alpha^2}$ ,  $\bar{u}$  为纬向基本风场。

对于小振幅扰动, 考虑扰动波动之间的相互作用是弱非线性相互作用问题, 扰动的演变一般取  $t$  (时间特征尺度) 为  $10^4$  s,  $L$  (水平空间特征尺度) 为  $10^5$  m,  $H$  (垂直空间尺度) 为  $10^4$  m。采用多重尺度分析方法<sup>[13]</sup>, 在时间  $t$  和  $x$  方向引入缓变量  $\tau, \pi, \xi, \eta$ , 且有  $\tau = \epsilon t, \xi = \epsilon x; \pi = \epsilon^2 t, \eta = \epsilon^2 x$  ( $\epsilon \ll 1$ ), 而在  $z$  方向仍为快变的。将扰动流函数按小参数  $\epsilon$  展开

$$\psi = \epsilon\psi^{(0)} + \epsilon^2\psi^{(1)} + \epsilon^3\psi^{(2)} + \dots \quad (2)$$

从而得到  $\epsilon$  的各阶问题, 引进算子:  $L = \left[ \left( \frac{\partial}{\alpha} + \bar{u} \frac{\partial}{\alpha} \right) \left( \frac{\partial^2}{\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\alpha^2} \right) + \left( \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}} - \bar{u} \right) \frac{\partial}{\alpha} \right]$ 。

对于  $\epsilon$  的一阶问题  $L[\psi^{(0)}] = 0$ , 令它有两个波包解

$$\psi^{(0)} = \sum_{j=1}^2 A_j(\tau, \pi, \xi, \eta) \varphi_j(z) e^{ik_j(x-c_j t)} + c.c. \quad (3)$$

其中,  $A_j$  为扰动流场的复振幅, 为缓变量的函数, 由高阶问题决定,  $\varphi_j(z)$  决定了波的垂直结构,  $c.c.$  为前项的共轭。其中  $\varphi_j(z)$  满足

$$\frac{d^2\varphi_j}{dz^2} + \left[ \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}(\bar{u}-c_j)} - \frac{\bar{u}}{\bar{u}-c_j} - k_j^2 \right] \varphi_j = 0. \quad (4)$$

由于扰动主要是重力内波的扰动, 上下边界固定, 因此边界条件为

$$\varphi_j(0) = \varphi_j(H) = \varphi_j^*(0) = \varphi_j^*(H) = 0 \text{ (其中 } \varphi_j^* \text{ 为 } \varphi_j \text{ 的共轭)}. \quad (5)$$

对于  $\epsilon$  的二阶问题, 可得到

$$L[\psi^{(1)}] = - \sum_{j=1}^2 e^{ik_j(x-c_j t)} g_{1j} - \sum_{j=1}^2 iA_j^2 e^{2ik_j(x-c_j t)} g_{2j} - iA_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)x - i(k_1 c_1 + k_2 c_2)t} g_{3-} - iA_1 A_2^* e^{i(k_1-k_2)x - i(k_1 c_1 - k_2 c_2)t} g_{4-} - \sum_{j=1}^2 iA_j^2 g_{5j} + c.c. \quad (6)$$

其中,  $g_{2j}, g_{3-}, g_{4-}, g_{5j}$  为系数,

$$g_{5j} = \left[ \frac{d^2\varphi_j}{dz^2} - k_j^2 \varphi_j \right] \frac{\partial A_j}{\partial \tau} - \left[ 2k_j^2(\bar{u}-c_j) \varphi_j - \bar{u} \left[ \frac{d^2\varphi_j}{dz^2} - k_j^2 \varphi_j \right] + \left[ \bar{u} - \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}} \right] \varphi_j \right] \frac{\partial A_j}{\partial \xi}. \quad (7)$$

设(6)式中右端第 1 项相对应的特解为

$$\psi_{1j}^{(1)} = \varphi_j^{(1)} e^{ik_j(x-c_j t)} + c.c. \quad (8)$$

将(8)式代入(6)式得到

$$\frac{d^2\varphi_j^{(1)}}{dz^2} + \left[ \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}(\bar{u}-c_j)} - \frac{\bar{u}}{\bar{u}-c_j} - k_j^2 \right] \varphi_j^{(1)} = \frac{i}{k_j(\bar{u}-c_j)} \left\{ \left[ \frac{d^2\varphi_j}{dz^2} - k_j^2 \varphi_j \right] \frac{\partial A_j}{\partial \tau} - \left[ 2k_j^2(\bar{u}-c_j) \varphi_j - \bar{u} \left[ \frac{d^2\varphi_j}{dz^2} - k_j^2 \varphi_j \right] + \left[ \bar{u} - \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}} \right] \varphi_j \right\} \frac{\partial A_j}{\partial \xi}. \quad (9)$$

将(9)式的两边同乘以  $\varphi_j$  并对  $z$  从 0 到  $H$  积分, 由条件(5)则两边都为零。右端可化为

$$\frac{\partial A_j}{\partial \tau} + \frac{\partial A_j}{\partial \xi} c_{gj} = 0. \quad (10)$$

其中,  $c_{gj} = c_j + 2 \frac{\int_0^H k_j^2 \varphi_j dz}{\int_0^H \left[ \frac{\alpha\Gamma}{\bar{u}(\bar{u}-c_j)^2} - \frac{\bar{u}}{(\bar{u}-c_j)^2} \right] \varphi_j^2 dz}$ 。

(10)式表明, 在  $\epsilon$  的二阶问题中, 波振幅  $A_j$  以群速度  $c_{gj}$  传播。故可令  $\varphi_j^{(1)} = i\Phi_j \frac{\partial A_j}{\partial \xi}$ 。

对于(6)式中右端第 2、3、4、5 项的特解为

$$\begin{cases} \Psi_2^{(1)} = \Phi_2 A_j^2 e^{i2k_j(x-c_j t)} + c.c., \\ \Psi_3^{(1)} = \Phi_3 A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)x-i(k_1c_1+k_2c_2)t} + c.c., \\ \Psi_4^{(1)} = \Phi_4 A_1 A_2^* e^{i(k_1-k_2)x-i(k_1c_1-k_2c_2)t} + c.c., \\ \Psi_5^{(1)} = \Phi_5(x, z, t) A_j^2 + c.c. \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $\Phi_{5j}(x, z, t)$  满足

$$L[\Phi_{5j}(x, z, t)] = -ig_{5j} \quad (12)$$

考虑到  $g_{5j}$  只是  $z$  的函数, 因此该特解为驻波。和文献[7]不同的是, 谭本道研究了垂直结构是实数的情形, 因此没有出现驻波, 这里由于考虑了垂直结构为复数时, 会激发出重力驻波。令

$$\Phi_{5j}(x, z, t) = (a_j x + b_j) \Phi_{5j}(z). \quad (13)$$

故对方程(6)有以下解

$$\Psi^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \Psi_{1j}^{(1)} + \sum_{j=1}^2 \Psi_{2j}^{(1)} + \Psi_3^{(1)} + \Psi_4^{(1)} + \sum_{j=1}^2 \Psi_{5j}^{(1)} + \Phi(z, \tau, \xi). \quad (14)$$

其中,  $\Phi(z, \tau, \xi)$  为(6)式的齐次方程的解, 它由  $\epsilon$  的三阶问题决定。

为了进一步得到  $A_j$  与  $\Phi$  所满足的条件, 继续考虑  $\epsilon$  的三阶问题, 得到以下方程:

$$\begin{aligned} L[\Psi^{(2)}] = & - \sum_{j=1}^2 e^{ik_j(x-c_j t)} p_{1j} - e^{ik_1(x-c_1 t)} i A_2^2 A_1 p_1 - e^{ik_2(x-c_2 t)} i A_1^2 A_2 p_2 - \\ & \sum_{j=1}^2 e^{2ik_j(x-c_j t)} p_{2j} - \sum_{j=1}^2 e^{3ik_j(x-c_j t)} i A_j^3 p_{3j} - e^{i(k_1+k_2)x-i(k_1c_1+k_2c_2)t} p_4 - \\ & e^{i(k_1-k_2)x-i(k_1c_1-k_2c_2)t} p_5 - e^{i(k_1+2k_2)x-i(k_1c_1+2k_2c_2)t} i A_1 A_2^2 p_6 - \\ & e^{i(2k_1+k_2)x-i(2k_1c_1+k_2c_2)t} i A_1^2 A_2 p_7 - e^{i(k_1-2k_2)x-i(k_1c_1-2k_2c_2)t} i A_1 A_2^* p_8 - \\ & e^{i(2k_1-k_2)x-i(2k_1c_1-k_2c_2)t} i A_1^2 A_2^* p_9 - \\ & \sum_{j=1}^2 \left[ \dots \Phi_j \left( \frac{\partial A_j^2}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial A_j^2}{\partial \xi} \right) - \right. \\ & 2 \left[ \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \alpha \partial \alpha} + \bar{u} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \alpha^2} \right] \frac{\partial A_j^2}{\partial \xi} - \left( \bar{u} - \frac{\alpha \Gamma}{\bar{u}} \right) \Phi_j \frac{\partial A_j^2}{\partial \xi} \left. \right] - \\ & \sum_{j=1}^2 \left[ \left[ \varphi \frac{d}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \right] \left[ \frac{d^2 \Phi_j}{dz^2} - k_j^2 \Phi_j \right] + 4k_j^2 \varphi \frac{d\Phi_j}{dz} - \right. \\ & k_j \left[ \varphi \frac{d}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \right] \left[ \frac{d^2 \Phi_j}{dz^2} - k_j^2 \Phi_j \right] \left. \right] \frac{\partial A_j^2}{\partial \xi} - \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \dots \Phi + \left[ \bar{u} - \frac{\alpha \Gamma}{\bar{u}} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + c.c. \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $p_{1j}, p_1, p_2, p_{2j}, p_{3j}, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9$  为系数。

可以看出(15)式右端有一类表达式与  $x$  和  $t$  都无关, 考虑到它左端的线性算符, 所以它们恒等于零。故特解  $\Phi$  满足

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha^2} - \left[ \bar{u} - \frac{\alpha \Gamma}{\bar{u}} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = & \sum_{j=1}^2 \left[ k_j \left[ \varphi \frac{d}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \right] \left[ \frac{d^2 \Phi_j}{dz^2} - k_j^2 \Phi_j \right] - \right. \\ & \left. 4k_j^2 \varphi \frac{d\Phi_j}{dz} - \left[ \varphi \frac{d}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \right] \left[ -k_j^2 \Phi_j + \frac{d^2 \Phi_j}{dz^2} \right] \right] \frac{\partial A_j^2}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

为了得到  $A_j$  的演化方程, 再考虑(15)中的一类非齐次解

$$L[\Psi^{(2)}] = \sum_{j=1}^2 F_j(\tau, \tau, \xi, \eta, z) e^{ik_j(x-c_j t)} + c.c. \quad (17)$$

其中,

$$\begin{cases} F_1 = f_1 \frac{\partial A_1}{\partial \pi} + h_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} + if_{10} \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} + if_{11} A_1^2 A_1 + if_{12} A_2^2 A_1 + if_{13} A_1, \\ F_2 = f_2 \frac{\partial A_2}{\partial \pi} + h_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} + if_{20} \frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi^2} + if_{21} A_1^2 A_2 + if_{22} A_2^2 A_2 + if_{23} A_2. \end{cases} \quad (18)$$

其中,  $f_j, h_j, f_{j0}, f_{j1}, f_{j2}, f_{j3}$  为系数。

设非齐次方程(17)的解为

$$\Psi_j^{(2)} = \Phi_j^{(2)} e^{ik_j(x-c_j t)} + c.c. \quad (19)$$

将(19)式代入(17)式得到

$$\frac{d^2 \Phi_j^{(2)}}{dz^2} - \left[ k_j^2 + \frac{\bar{u}}{\bar{u} - c_j} - \frac{\alpha \Gamma}{\bar{u}(\bar{u} - c_j)} \right] \Phi_j^{(2)} = \frac{F_j}{k_j(\bar{u} - c_j)}. \quad (20)$$

将(20)式的两端同乘以  $\Phi$  并对  $z$  从 0 到  $H$  积分, 由条件(5)则两边都为零, 从而得到  $A_1$  和  $A_2$  的演化方程

$$\begin{cases} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \pi} + c_{g1} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_1 - i \left[ \alpha \frac{\partial^2 A_1}{\partial \xi^2} + \sigma_1 A_1^2 A_1 + \mathcal{Y}_{12} A_2^2 A_1 + \lambda_1 A_1 \right] \right] = 0, \\ \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \pi} + c_{g2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_2 - i \left[ \alpha \frac{\partial^2 A_2}{\partial \xi^2} + \sigma_2 A_2^2 A_2 + \mathcal{Y}_{21} A_1^2 A_2 + \lambda_2 A_2 \right] \right] = 0. \end{cases} \quad (21)$$

其中,

$$\begin{cases} \alpha_j = \frac{I_{j0}}{j}, \sigma_j = \frac{I_{jj}}{j}, \mathcal{Y}_{12} = \frac{I_{12}}{1}, \mathcal{Y}_{21} = \frac{I_{21}}{2}, \lambda_j = \frac{I_{j3}}{j}, \\ j = - \int_0^H f_j \Phi dz, I_{j0} = \int_0^H f_{j0} \Phi dz, I_{jj} = \int_0^H f_{jj} \Phi dz, \\ I_{12} = \int_0^H f_{12} \Phi dz, I_{21} = \int_0^H f_{21} \Phi dz, I_{j3} = \int_0^H f_{j3} \Phi dz. \end{cases} \quad (22)$$

将(16)式与(21)式一起称为关于  $\Phi, A_1$  和  $A_2$  的耦合方程组, 该方程组反映了非线性方程作用对重力内波包的影响。为了进一步简化, 用文献[14]的方法, 作变换

$$\begin{cases} T = \tau; \\ X = \frac{1}{\epsilon} (\eta - c_{g1} \tau) = \xi - c_{g1} \tau = \epsilon(x - c_{g1} t). \end{cases} \quad (23)$$

将(23)式代入(16)式, 易知可设特解为

$$\Phi = \sum_{j=1}^2 H_j(z) A_j^2. \quad (24)$$

将(23)、(24)式代入(21)式, 而  $\lambda$  与  $A_1^2, A_2^2$  有联系, (21)式又可化为

$$i \frac{\partial A_1}{\partial T} + \alpha_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} + (\sigma_1^* A_1^2 + \mathcal{Y}_{12}^* A_2^2) A_1 = 0, \quad (25)$$

$$i \frac{\partial A_2}{\partial T} + i c_{g2}^* \frac{\partial A_2}{\partial X} + \alpha_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial X^2} + (\mathcal{Y}_{21}^* A_1^2 + \sigma_2^* A_2^2) A_2 = 0. \quad (26)$$

其中,  $\alpha_1, \alpha_2$  同上,

$$\left\{ \begin{aligned} c_{g2}^* &= \frac{1}{\epsilon} (c_{g2} - c_{g1}), \\ \sigma_1^* &= \sigma_1 + \lambda_{11}, \sigma_2^* = \sigma_2 + \lambda_{22}, \gamma_{12}^* = \gamma_{12} + \lambda_{12}, \gamma_{21}^* = \gamma_{21} + \lambda_{21}, \\ \lambda_{ji} &= \frac{{}^H k_j \mathcal{Q} \left[ \mathcal{Q} \frac{d^3 H_j}{dz^3} - \left( -k_j^2 \mathcal{Q} + \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} \right) \frac{dH_j}{dz} \right] dz}{- {}^H k_1 \mathcal{Q} \left[ \mathcal{Q} \frac{d^3 H_2}{dz^3} - \left( -k_1^2 \mathcal{Q} + \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} \right) \frac{dH_2}{dz} \right] dz}, \\ \lambda_{12} &= \frac{{}^H k_1 \mathcal{Q} \left[ \mathcal{Q} \frac{d^3 H_2}{dz^3} - \left( -k_1^2 \mathcal{Q} + \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} \right) \frac{dH_2}{dz} \right] dz}{- {}^H k_2 \mathcal{Q} \left[ \mathcal{Q} \frac{d^3 H_1}{dz^3} - \left( -k_2^2 \mathcal{Q} + \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} \right) \frac{dH_1}{dz} \right] dz}, \\ \lambda_{21} &= \frac{{}^H k_2 \mathcal{Q} \left[ \mathcal{Q} \frac{d^3 H_1}{dz^3} - \left( -k_2^2 \mathcal{Q} + \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} \right) \frac{dH_1}{dz} \right] dz}{- {}^H k_1 \mathcal{Q} \left[ \mathcal{Q} \frac{d^3 H_2}{dz^3} - \left( -k_1^2 \mathcal{Q} + \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} \right) \frac{dH_2}{dz} \right] dz}. \end{aligned} \right. \quad (27)$$

方程(25)、(26)为耦合的非线性 schrodinger 方程组, 系数  $\alpha_1, \alpha_2$  称为色散系数,  $\sigma_1^*, \sigma_2^*$  称为 Landau 系数,  $\gamma_{12}^*, \gamma_{21}^*$  为相互作用系数, 从(27)式可以看出, 它们与  $k, \bar{u}, \bar{u} - \alpha\Gamma/\bar{u}$  有关, 与  $\mathcal{Q}, \Phi_j, \Phi_j, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_1, \Phi_2, H_j$  也有关。

## 2 两波包的相互作用

对于方程组(25)、(26)很难求得它的解析解, 下面用数值方法求它们的两波包重力孤立波相互作用的解。前面指出方程组的系数和很多量有关, 在不影响讨论问题的定性条件下, 作为背景场的典型值处理, 在计算过程中, 为了简单起见, 将  $\bar{u}$  和  $\bar{u}$  看作基本风速及其曲率的平均值(令  $\bar{u}$  的平均值为  $u_0$ ) 代入方程中计算, 则  $\mathcal{Q}(z)$  的本征值可以简单地成为线性问题

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} + \left( \frac{\alpha\Gamma}{u_0(u_0 - c_j)} - \frac{\bar{u}}{u_0 - c_j} - k_j^2 \right) \mathcal{Q} &= 0, \\ \mathcal{Q}(0) = \mathcal{Q}(H) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

上式有解的条件必须有

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{u} &> \frac{\alpha\Gamma}{u_0} - (u_0 - c_j) k_j^2, & u_0 - c_j < 0; \\ \bar{u} &< \frac{\alpha\Gamma}{u_0} - (u_0 - c_j) k_j^2, & u_0 - c_j > 0. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

在上述条件下, 只讨论第一种情况, 且仅考虑流函数的垂直方向为半波时, 则(28)式解为

$$\mathcal{Q} = \sin m_j z. \quad (30)$$

其中,  $m_j = \pm \frac{\pi}{H}$ 。将(30)式代入(6)式, 得到

$$\begin{aligned} L[\Psi^1] &= \sum_{j=1}^2 D_j \sin m_j z e^{ik_j(x-c_j t)} \left[ \frac{\partial A_j}{\partial t} + c_{gj} \frac{\partial A_j}{\partial z} \right] + \\ &\frac{i}{2} A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)x - i(k_1c_1+k_2c_2)t} (D_2 - D_1) \times \\ &[\sin(m_1 + m_2)z(k_1m_2 - k_2m_1) - \sin(m_2 - m_1)z(k_1m_2 + k_2m_1)] + \\ &\frac{i}{2} A_1 A_2^* e^{i(k_1-k_2)x - i(k_1c_1-k_2c_2)t} (D_2 - D_1) \times \\ &[\sin(m_1 + m_2)z(k_1m_2 + k_2m_1) + \sin(m_2 - m_1)z(-k_1m_2 + k_2m_1)]. \end{aligned} \quad (31)$$

其中,  $D_j = k_j^2 + m_j^2$ ,  $c_{gj} = u_0 + \frac{\bar{u} - \frac{\alpha\Gamma}{u_0} + 2k_j^2(u_0 - c_j)}{D_j}$ 。消去久期项, 有  $\frac{\partial A_j}{\partial \tau} + c_{gj} \frac{\partial A_j}{\partial \xi} = 0$

( $j = 1, 2$ )。因此  $\Psi^{(1)}$  就有如下形式

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)} = & e^{i(k_1+k_2)x - i(k_1c_1+k_2c_2)t} A_1 A_2 [R_1 \sin(m_1 + m_2)z + R_2 \sin(m_2 - m_1)z] + \\ & e^{i(k_1-k_2)x - i(k_1c_1-k_2c_2)t} A_1 A_2^* [S_1 \sin(m_1 + m_2)z + S_2 \sin(m_2 - m_1)z] + \\ & \Phi(\tau, \xi, z) + c.c. \end{aligned} \quad (32)$$

其中,  $R_1, R_2, S_1, S_2$  为系数。即此时  $\Phi_j, \Phi_j^*, \Phi_j$  均为零, 而  $\Phi, \Phi^*$  不为零。代入(22)、(27)式得到  $\alpha_j, \sigma_j^*, \gamma_{12}^*, \gamma_{21}^*$  的表达式。

从上面可以发现耦合方程组(25)、(26)的系数不是任意给出的, 应该由原始参数加以确定。这里所取的原始参数为:  $H = 7 \text{ km}$ ,  $L = 100 \text{ km}$ ,  $u_0 = 15 \text{ m/s}$ ,  $\bar{u} = 0.7 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\alpha = 3 \times 10^{-2} \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{K})$ ,  $\Gamma = 0.2 \times 10^{-3} \text{ K/m}$ ,  $m_1 = m_2 = \pi/L$ ,  $k_1 = 2\pi/L$ ,  $k_2 = 1.2k_1$ 。使用差分方法对方程进行数值求解。

### 2.1 相撞重力波

为了从理论上证明两个相向而行的重力波合并后可产生大暴雨的观测事实<sup>[4]</sup>, 下面研究两个重力波包相撞的演变过程, 为此, 取初始条件为

$$A_j = \frac{2\alpha_j}{\sigma_j} \eta \operatorname{sech}(\eta) (X + X_{j0}) e^{i\xi_j(X + X_{j0})}. \quad (33)$$

式中,  $\eta, \xi_j$  表征孤立波包振幅、移动速度。

当  $\xi_j$  取异号(表明两波包相向而行), 从图 1 可以看出, 初始时刻  $t_0$  右行的重力波的振幅略大于左行重力波, 相遇而行时, 到  $t_1$  时刻两波振幅比初始时刻有所增加, 合并后( $t_2, t_3$  时刻)两波波幅急剧增加, 波宽变窄, 振幅比初始时刻增加了 80% 左右, 分离后逐渐恢复原态。这说明, 相向而行的重力波在合并期间发生的非线性相互作用使得整体波振幅突然增加, 这可能是某些大暴雨形成的重要机制之一。

### 2.2 相追重力波

为了从理论上证明快速移动的重力波追上慢速的重力波会发生变形从而形成爬线的事实<sup>[5-6]</sup>, 取上述初始条件。

当  $\xi_j$  取同号(表明两波包相追), 从图 2 可以看出, 初始时刻两个右行的重力波, 快速移动的波振幅略大于慢速移动的重力波, 相追时, 到  $t_1, t_3$  时刻波振幅也急剧增加, 波宽变窄。追上后( $t_4, t_6, t_8$  时刻)波形发生改变。这说明, 相追的重力波会改变波形, 而且波的振幅也有所增加, 这可能是一类爬线形成的原因之一。

## 3 结 语

(1) 垂直切变流中的非线性重力波的振幅演变满足非线性 schrodinger 方程, 即当方程组(25)、(26)中  $A_2$  取为零时, 这与文献[2-3]得到的结论一致。

(2) 对于两个非线性重力波相互作用, 其振幅的演变满足耦合的非线性 schrodinger 方程组, 并且相互作用时会激发出重力驻波。

(3) 数值计算表明: 在原始参数下, 方程(25)、(26)的系数可以加以确定。而且两个重力波包相遇, 波振幅增加, 波宽变窄, 这可能是某些大暴雨形成的重要机制之一; 两个重力波包相追, 波振幅也增加, 波形发生改变, 这可能是一类爬线形成的原因之一。

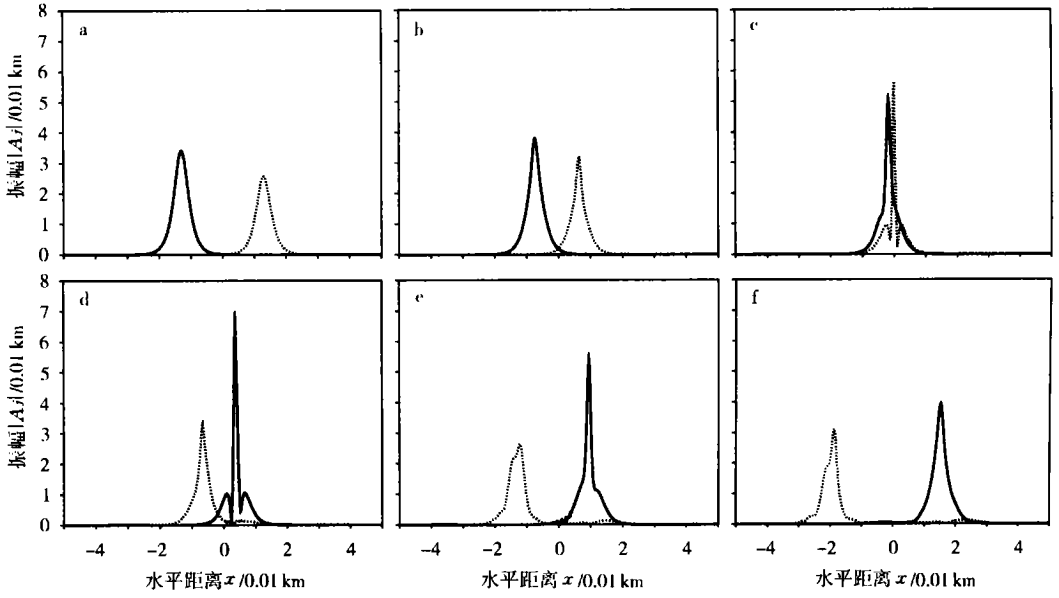


图1 两包络孤立波的碰撞(实线为波1,虚线为波2)

a, b, c, d, e, f 分别为  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  时刻的振幅变化

Fig. 1 The collision of two wave packets (solid line: wave 1, dashed line: wave 2)

a.  $t_0$ ; b.  $t_1$ ; c.  $t_2$ ; d.  $t_3$ ; e.  $t_4$ ; f.  $t_5$

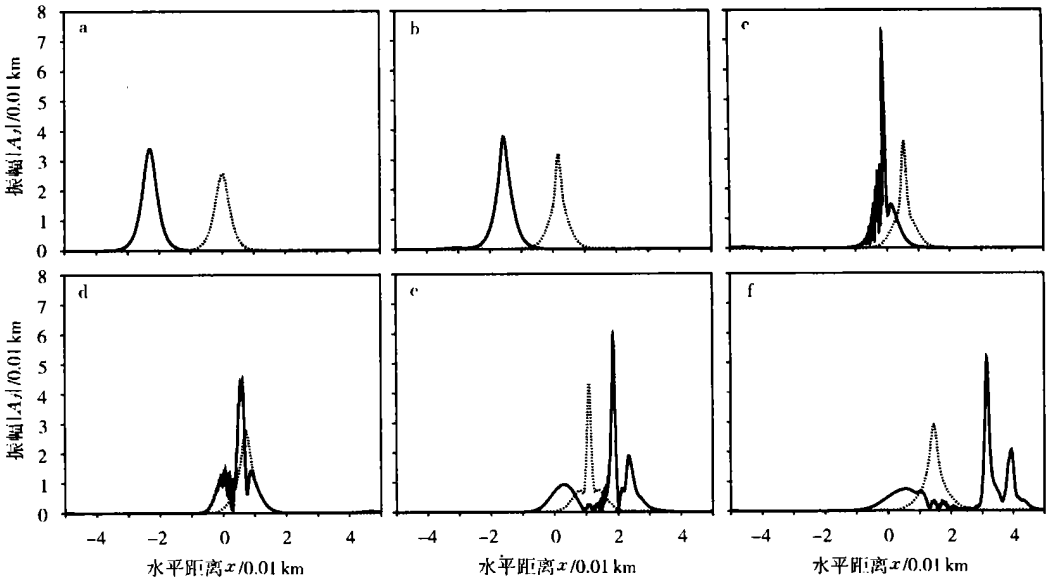


图2 两包络孤立波的追赶(实线为波1,虚线为波2)

a, b, c, d, e, f 分别表示  $t_0, t_1, t_3, t_4, t_6, t_8$  时刻的振幅变化

Fig. 2 The chase of two wave packets (solid line: wave 1, dashed line: wave 2)

a.  $t_0$ ; b.  $t_1$ ; c.  $t_3$ ; d.  $t_4$ ; e.  $t_6$ ; f.  $t_8$

## 参考文献:

- [ 1 ] 伍荣生, 党人庆, 余志豪, 等. 动力气象学[ M ]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983: 274-318.
- [ 2 ] 高守亭, 杨惠君. 多维约化摄动和大气中的非线性波[ J ]. 大气科学, 1986, 10( 1 ): 35-45.
- [ 3 ] 许习华, 丁一汇. 中尺度大气中孤立重力波特征的研究[ J ]. 大气科学, 1991, 15( 4 ): 58-68.
- [ 4 ] 丁德刚, 王树芬. 相向而行的重力波与暴雨[ J ]. 大气科学, 1994, 18( 4 ): 451-455.
- [ 5 ] 李麦村. 爬线形成的非线性过程[ J ]. 中国科学, 1976( 6 ): 592-601.
- [ 6 ] 李麦村. 重力波对特大暴雨的触发作用[ J ]. 大气科学, 1978, 2( 3 ): 201-209.
- [ 7 ] 谭本旭. 非线性 Rossby 波及其相互作用 . Rossby 包络孤立波的碰撞[ J ]. 中国科学( B 辑 ), 1993, 23( 4 ): 431-448.
- [ 8 ] 吕克利. 局地热力强迫与定常大振幅扰动的形成[ J ]. 气象学报, 1998, 56( 4 ): 424-435.
- [ 9 ] 吕克利, 徐银梓, 谈哲敏. 动力气象学[ M ]. 南京: 南京大学出版社, 1996.
- [ 10 ] Redekopp L. Solitary Rossby wave in zonal shear flows and their interactions [ J ]. J Atmos Sci, 1978, 35( 5 ): 790-804.
- [ 11 ] 罗德海. 阻塞非线性动力学[ M ]. 北京: 气象出版社, 2000.
- [ 12 ] Warn T, Branstetter B. The amplification and capture of atmospheric solitons by topography [ J ]. J Atmos Sci, 1983, 40( 1 ): 28-38.
- [ 13 ] 奈佛 A H. 摄动方法[ M ]. 上海: 上海科技出版社, 1984.
- [ 14 ] Jeffrey A, Kawahara T. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory[ M ]. New York: Pitman Publishing Inc, 1982.

## Nonlinear Gravitational Waves and Their Interactions in a Vertical Shearing Flow

ZHU Li-hua, ZHOU Wei-can, ZOU Lan-jun

( Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044, China )

**Abstract:** In this paper, the nonlinear gravitational waves in a baroclinic atmosphere are studied. It is found by use of the WKB method that the interaction between two wave packets is governed by coupled nonlinear schrodinger equations and the immobile wave may occur. It is shown by numerical calculations that the waves amplify and the width of waves becomes narrow after the collision or chase of two solitary gravitational waves. The results indicate that the nonlinear interaction between the gravitational waves may be one of the causes for the outbreak of severe convective weather.

**Key words:** nonlinear gravitational wave; coupled schrodinger nonlinear equations; solitary gravitational wave; immobile wave