第27卷第6期 南京气象学院学报 Vol. 27 No. 6
2004年12月 Journal of Nanjing Institute of Meteorology Dec. 2004

文章编号: 1000-2022(2004)06-0822-06

受迫Li nard方程周期解的存在性

邹兰军, 周伟灿, 朱利华
(南京信息工程大学 数学系,江苏 南京 210044)

摘 要: 对于受迫Li nard方程,利用Sobolev空间范数,给出了周期解的估计,进而利用变分原理、Schauder不动点定理,证明了周期解的存在性。

关键词: Li nard 方程; 临界点; Schauder 不动点定理; 全连续算子
中图分类号: O175.1 文献标识码: A

由于Li nard方程在理论上和实际应用中具有重要的意义,所以引起了人们对其周期解的广泛关注[1-2]。王克[3]利用非临界线性系统理论和不动点方法得到了Li nard方程概周期解的存在唯一性。林发兴[4]利用指数型二分性理论和系统解的一致渐近稳定得到其周期解及概周期解的存在性。Tan等[5]通过行波法将广义的二维非齐次KdV-Burgers方程化为Li nard型方程并进行了研究。在大气科学中也能得到类似的Li nard方程[6]。本文将讨论受迫Li nard方程 $-\overset{\circ\circ}{w}-(Aw-D)\overset{\circ}{w}-Bw+F(w)=h(\tau)$, 其中$A, B, D$为常数, $(Aw-D)\overset{\circ}{w}, F(w), h(\tau)$分别为非线性阻尼项、非线性强迫项和周期强迫项。如果$A=0$时,就是文献[5]已讨论的结果。本文利用Sobolev空间范数,给出了解的估计,然后利用变分方法,通过Schauder不动点定理,证明了周期解的存在性。

1 解的估计

可将上述Li nard方程周期解的存在性问题转化为两点边值问题(P1)

$$-\overset{\circ\circ}{w}-(Aw-D)\overset{\circ}{w}-Bw+F(w)=h(\tau), \tag{1}$$

$$w^{(i)}(0)=w^{(i)}(T), i=0,1。\tag{2}$$

不失一般性,设$F(0)=0, w(0)=w(T)=0$。

考虑Sobolev空间$W^{1,2}([0,T],R)$。

定义$W^{1,2}$的子空间$E=\{w\in W^{1,2}\ w^{(i)}(0)=w^{(i)}(T), i=0,1\}$,以下简记$\|\cdot\|_{L^2}=\|\cdot\|$。

引理1 设(1) $F\in C(R)$, $h(\tau)$是R上的以T为周期的连续函数,(2) $\inf\limits_{s\in R}\dfrac{F(s)}{s}=\lambda>-\infty$, (3) $1+\dfrac{T^2}{2}(-B+\lambda)>0$, 则问题(P1)的解有界,且有估计式

$$\|w\|\leq k\|h\|,$$

收稿日期: 2003-04-17; 改回日期: 2003-07-22
基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(G1998040907)
作者简介: 邹兰军(1978-),男,江苏无锡人,硕士,研究方向: 微分方程.

$$\|w\| \le kT^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty。\tag{3}$$

其中$k=\left(\frac{2}{T^2}-B+\lambda\right)^{-1}>0$, $\|h\|_\infty=\sup_{\tau\in[0,T]}|h(\tau)|$。

证明　由(1)式,对方程两边与w作内积

$$\langle \ddot{w},w\rangle-\langle(Aw-D)\dot{w},w\rangle-\langle Bw,w\rangle+\langle F(w),w\rangle=\langle h,w\rangle,w\in E。$$

也即

$$\int_0^T(\dot{w}^2-Bw^2+F(w)w)\mathrm{d}\tau=\int_0^T h(\tau)w\,\mathrm{d}\tau。\tag{4}$$

由$w(\tau)=\int\dot{w}(t)\mathrm{d}t$及Schwartz-Cauchy 不等式,有

$$\int_0^T w^2\mathrm{d}\tau\le\frac{T^2}{2}\int_0^T\dot{w}^2\mathrm{d}\tau。\tag{5}$$

从条件(2)及Schwartz-Cauchy 不等式,(4)式化为

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{T^2}-B+\lambda\right)\int_0^T w^2\mathrm{d}\tau&\le\int_0^T(\dot{w}^2-Bw^2+F(w)w)\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^T h(\tau)w\,\mathrm{d}\tau\\&\le\left(\int_0^T h(\tau)^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T w^2\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}。\end{aligned}$$

可得

$$\|w\|\le\left(\frac{2}{T^2}-B+\lambda\right)^{-1}\|h\|。\tag{6}$$

另一方面,有

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{T^2}-B+\lambda\right)\int_0^T w^2\mathrm{d}\tau&\le\sup_{\tau\in[0,T]}|h(\tau)|\int_0^T|w|\mathrm{d}\tau\\&\le T^{\frac{1}{2}}\sup_{\tau\in[0,T]}|h(\tau)|\;\|w\|\\&=T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty\|w\|。\end{aligned}\tag{7}$$

也即$\|w\|\le T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{T^2}-B+\lambda\right)^{-1}\|h\|_\infty$。证毕。

推论1　在引理1条件下,若$F(w)$单调不减,且$1-\frac{T^2}{2}B>0$,则问题(P1)的解有界且

$$\|w\|\le\bar{k}\|h\|,$$
$$\|w\|\le\bar{k}T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty。\tag{8}$$

其中$\bar{k}=\left(\frac{2}{T^2}-B\right)^{-1}>0$。

证明　因$F(w)$连续且单调不减,$F(0)=0$,所以$wF(w)\ge0$,在引理1的每个表达式中取$\lambda=0$,即证。

引理2　设引理1的条件(1)满足,则在下列情形下:(Ⅰ)若$-\frac{D}{A}>\eta$,则问题(P1)的解有界且$\|w\|\le\frac{T}{2}|A\eta+D|^{-1}\|h\|$, $\|w\|\le\frac{T^{\frac{3}{2}}}{2}|A\eta+D|^{-1}\|h\|_\infty$;(Ⅱ)若$\frac{D}{A}>\eta$,则问题(P1)的解有界且$\|w\|\le\frac{T}{2}|A\eta-D|^{-1}\|h\|$, $\|w\|\le\frac{T^{\frac{3}{2}}}{2}|A\eta-D|^{-1}\|h\|_\infty$。其中

$\eta = \sup_{\tau\in[0,T]} |w(\tau)|$。

证明 (略)。

从

$$|w(t)| \le T^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T |\dot{w}|^2 \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, t \in [0, T], \tag{9}$$

及引理1、引理2, 可得推论2～4。

推论2 设在引理2(Ⅰ)或引理2(Ⅱ)情形下, 则问题(P1)的解有界且

$$(\text{Ⅰ})\ |w(\tau)| \le \begin{cases} T^{\frac{1}{2}}\,|A\eta + D|^{-1}\,\|h\|; \\ T\,|A\eta + D|^{-1}\,\|h\|_\infty。\end{cases} \tag{10}$$

$$\text{或}(\text{Ⅱ})\ |w(\tau)| \le \begin{cases} T^{\frac{1}{2}}\,|A\eta - D|^{-1}\,\|h\|; \\ T\,|A\eta - D|^{-1}\,\|h\|_\infty。\end{cases} \tag{11}$$

推论3 设在引理1、2条件下, 则

$$\|w(\tau)\| \le \begin{cases} \min\left\{k, \dfrac{T}{2}\,|A\eta + D|^{-1}\right\}\|h\|; \\ \min\left\{kT^{\frac{1}{2}}, \dfrac{T^{\frac{3}{2}}}{2}\,|A\eta + D|^{-1}\right\}\|h\|_\infty。\end{cases}$$

$$\text{或}\ \|w(\tau)\| \le \begin{cases} \min\left\{k, \dfrac{T}{2}\,|A\eta - D|^{-1}\right\}\|h\|; \\ \min\left\{kT^{\frac{1}{2}}, \dfrac{T^{\frac{3}{2}}}{2}\,|A\eta - D|^{-1}\right\}\|h\|_\infty。\end{cases}$$

推论4 在引理1、2条件下, 若$h(\tau)\equiv 0$, 则问题(P1)不存在非平凡周期解。

证明 由$h(\tau)\equiv 0$, 则$\|h\| = 0$, 得出$\|w\| = 0$。又$w \in C^1[0, T]$, 所以$|w| = 0$, 即$w = 0$。

2 解的存在性

首先考虑问题(P2):

$$-\ddot{w} + F(w) = h(\tau), \tag{12}$$

$$w^{(i)}(0) = w^{(i)}(T), i = 0, 1。\tag{13}$$

定义泛函$J: E \to R$,

$$J(w) = \int_0^T\left(\frac{1}{2}|\dot{w}|^2 + V(w)\right)\mathrm{d}\tau - \langle h(\tau), w\rangle, \forall\, w \in E。\tag{14}$$

其中$V(w) = \int_0^w F(t)\,\mathrm{d}t$。

易证下面的变分原理。

引理3 J 在E 中的临界点是问题(P2)的解。

引理4 E 上的$W^{1,2}$范数$\|w\|_E = \|w\|_{W^{1,2}} = \left(\int_0^T(|w|^2 + |\dot{w}|^2)\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}$ 等价于下述模

$$\|\dot{w}\| = \left(\int_0^T |\dot{w}|^2 \mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \forall\, w \in E。\tag{15}$$

证明 对$\forall\, w \in E$, (5)式成立

$$\int_0^T |\dot{w}|^2 \mathrm{d}\tau \le \int_0^T(|w|^2 + |\dot{w}|^2)\mathrm{d}\tau \le \left(1 + \frac{T^2}{2}\right)\int_0^T |\dot{w}|^2 \mathrm{d}\tau。\tag{16}$$

结论即证。

引理5[5]　设(1) $F(w)\in C(R)$, $h(\tau)$ 是 R 上的以 T 为周期的连续函数且 $\int_0^T h(\tau)\mathrm{d}\tau=0$; (2) $V(w)>M$, $\forall w\in R, M\in R$, 则问题(P2)至少有一个 T-周期解 $w\in C^2[0,T]$。

定理1　设(1) $F(w)\in C(R)$, $h(\tau)$ 是 R 上的以 T 为周期的连续函数且 $\int_0^T h(\tau)\mathrm{d}\tau=0$; (2) $\inf\limits_{s\in R}\frac{F(s)}{s}=\lambda>-\infty$, $2+\lambda T^2>0$; (3) $V(w)=\int_0^w F(t)\mathrm{d}t>M$, $\forall w\in R, M\in R$; (4) 当 $\lambda\geq 0$ 时, $T\left(1+\frac{T^2}{2}\right)^{1/2}<\frac{1}{K}$; 或者当 $\lambda<0$ 时, $\left(1+\frac{\lambda T^2}{2}\right)\beta>K$, 其中 $K=\max\{|A|+|D|, |B|\}$, $\beta=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$, 则问题(P1)至少有一个解 $w\in C^2[0,T]$。

证明　令 $\theta\in C^2[0,T]\cap E$ 为满足 $|\theta|<1$ 且 $\int_0^T\theta\mathrm{d}\tau=0$ 的周期函数, 考虑周期问题:

$$-\ddot{w}_\theta+F(w_\theta)=h(\tau)+(A\theta-D)\dot{\theta}+B\theta, 0\leq\tau\leq T, \tag{17}$$

$$w_\theta^{(i)}(0)=w_\theta^{(i)}(T), i=0,1。 \tag{18}$$

由引理5, 问题(17)、(18)式对于给定的 $\theta\in C^2[0,T]\cap E$ 至少有一个 T-周期解 $w_\theta\in C^2[0,T]$。另外, 映射 $\Gamma: C^2\cap E\to C^2$ 由 $\Gamma\theta=w_\theta$ 定义。Γ 是连续的。也能够证明 Γ 在 $E\subset W^{1,2}$ 中是紧的。事实上, 对某个 $r>0$, 设 $\|\theta\|_E\leq r$。由引理4, 亦即 $\|\theta\|_{C[0,T]}\leq r$ 或 $\|\theta\|_{L^2}\leq r$。

对(17)式与 w_θ 作内积, 有

$$\int_0^T \dot{w}_\theta^2\mathrm{d}\tau+\lambda\int_0^T w_\theta^2\mathrm{d}\tau\leq\int_0^T[h(\tau)+(A\theta-D)\dot{\theta}+B\theta]w_\theta\mathrm{d}\tau。 \tag{19}$$

从定理条件(2), 有

$$\begin{aligned}\frac{2}{T^2}\int_0^T w_\theta^2\mathrm{d}\tau+\lambda\int_0^T w_\theta^2\mathrm{d}\tau&\leq\int_0^T\{|h(\tau)|+|(A\theta-D)\dot{\theta}+B\theta|\}|w_\theta|\mathrm{d}\tau\\&\leq\sup_{\tau\in[0,T]}|h(\tau)|\int_0^T|w_\theta|\mathrm{d}\tau+K\int_0^T(|\dot{\theta}|+|\theta|)|w_\theta|\mathrm{d}\tau\\&\leq\left(T^{\frac{1}{2}}\sup_{\tau\in[0,T]}|h(\tau)|+\sqrt{2}K\|\theta\|_E\right)\|w_\theta\|_{L^2}。\end{aligned} \tag{20}$$

其中 $K=\max\{|A|+|D|, |B|\}$。

因此

$$\|w_\theta\|\leq\frac{T^2}{2+\lambda T^2}\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty+\sqrt{2}Kr\right)。 \tag{21}$$

另一方面, 当 $\lambda\geq 0$ 时, 由(19)、(20)和(5)式得

$$\int_0^T\dot{w}_\theta^2\mathrm{d}\tau\leq\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty+\sqrt{2}K\|\theta\|_E\right)\frac{T}{\sqrt{2}}\|\dot{w}_\theta\|_{L^2},$$

即

$$\|\dot{w}_\theta\|_{L^2}\leq\frac{T}{\sqrt{2}}\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty+\sqrt{2}Kr\right)。 \tag{22}$$

当 $\lambda<0$ 时, 有

$$\|\dot{w}_\theta\|_{L^2}\leq\frac{\sqrt{2}T}{2+\lambda T^2}\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty+\sqrt{2}Kr\right)。 \tag{23}$$

由(21)～(23)和(9)、(16)式, 显然可知函数族 $\{w_\theta\}$ 等度连续, 而且从(9)、(22)和(23)式

得出$\{w_\theta\}$一致有界。据Ascoli-Arzela定理,$\{w_\theta\}$在$C^2[0,T]$是相对紧的,即映射Γ是紧的。

现在选择$r>0$,使得$\mu\left(T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty+\sqrt{2}Kr\right)<r$或者$T^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty<\frac{1}{\mu}(1-\sqrt{2}K\mu)r$。其中,当$\lambda\geq 0$时,$\mu=\sqrt{\frac{1}{2+T^2}}$;或当$\lambda<0$时,$\mu=\frac{\sqrt{2}T}{(2+\lambda T^2)\beta}$,$\beta=\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$。这对条件(4)显然是可能的,则有$\|w_\theta\|_E\leq r$。由引理4,有$\|\mathring{w}_\theta\|\leq r$或者$\|w_\theta\|_{L^2}\leq r$和$|w_\theta|\leq r,\forall\tau\in[0,T]$。

这表明Γ把适当的球$B=B(0,r)\subset C^2[0,T]\cap E$映射到自身,也即$\Gamma B\subset B$。应用Schauder不动点定理,$\Gamma$有一个不动点$\bar\theta$,即$\bar\theta=w_\theta$。由于$h$和$F$均连续,$w=w_\theta\in C^2[0,T]$就是所求的问题(P1)的解。证毕。

定理2 设(1)$h(\tau)$是R上的以T为周期的连续函数且$\int_0^T h(\tau)\mathrm{d}\tau=0$;(2)$F(w)$连续且单调不减;(3)$1-KT\left(1+\frac{T^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>0$,$K=\max\{|A|+|D|,|B|\}$,则问题(P1)至少有一个解$w\in C^2[0,T]$。

证明 因$F(w)$连续且单调不减,$F(0)=0$,知$wF(w)\geq 0$,在定理1证明中取$\lambda=0$即证。

3 讨 论

对于一般性的Liénard方程$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=p(t)$解的问题正如本文开头所述,由于研究方法的不同,对$f(x)$,$g(x)$所需条件也不同。本文考虑的是一类较特殊的Liénard方程,因此方程存在解的条件比一般性条件要弱。

例:$\ddot{w}+(Aw-D)\dot{w}+Bw-w=A\sin\tau\cos\tau-D\cos\tau+(B-2)\sin\tau$,$0<B<1$,易证本例满足定理1的条件,进而有相应的结论,且可知$w=\sin\tau$为本例的解,但本例不满足文献[7]中的$f(x)$,$g(x)$条件:(1)$f(x)$连续,$\lim_{x\to\pm\infty}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\to\pm\infty$,(2)$g(x)$连续,对$|x|>a$,有$xg(x)>0$。所以本例的结论不能由文献[7]中的定理所得。

参考文献:

[1] Sugie J, Hara T. Non-existence of periodic solutions of the Lienard system[J]. J Math Anal Appl, 1991, 159(1): 224-236.

[2] Lazer A C. On Schauder's fixed point theorem and forced second order nonlinear oscillation[J]. J Math Anal Appl, 1968, 21: 421-425.

[3] 王 克. 强迫Liénard方程的概周期解[J]. 数学年刊, 1995, 16A(4): 417-423.

[4] 林发兴. Liénard方程周期解、概周期解的存在性[J]. 数学学报, 1996, 39(3): 314-318.

[5] Tan J Y, Wen S L. Periodic traveling wave solution to a forced two-dimensional generalized KdV-burgers equation[J]. J Math Research & Exposition, 2001, 21(4): 483-490.

[6] 赵瑞星. 层结大气中重力惯性波的非线性周期解[J]. 气象科学, 1990, 48(3): 275-283.

[7] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions[M]. New York: Springer-Verlag, 1975.

Existence of Periodic Solution to a Forced Li nard Equation

ZOU Lan-jun, ZHOU Wei-can, ZHU Li-hua

(Department of Mathematics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: To a forced Li nard equation discussed in this paper, the estimates of the periodic solution are given by using the norm estimate in the Sobolev space, then by virtue of the variation principle and Schauder's fixed point theorem, the existence of the periodic solution is proved.

Key words: Li nard equation; critical point; Schauder's fixed point theorem; completely continuous operator