用同伦算法求解带阻尼项的 *n*维 Li nard型方程

许敏, 周伟灿
(南京信息工程大学 数理学院,江苏 南京 210044)

摘要: Li nard型方程在限定条件下可用同胚理论证明其存在唯一周期解。在同胚理论的基础上,验证了可用同伦算法求解方程边值问题的周期解,给出了求取周期解的具体算法,并给出实例说明此算法可行。

关键词: Li nard型方程; 周期解; 同胚; 同伦
中图分类号: O175.2 文献标识码: A 文章编号: 1000-2022(2007)02-0284-05

Homotopy Method for Solving the Periodic Solution of Li nard Type Equation

XU Min, ZHOU Wei-can
(School of Mathematics and Physics, NUIST, Nanjing 210044, China)

Abstract: Homeomorphism theory can be used to prove that the Li nard type equation has only one periodic solution in some restricted condition. Based on this premise, this paper discusses the feability of using the homotopy method to solve the periodic solution of the boundary value problem of the lienard type equation. At last the concrete calculation methodology is given to solve the periodic solution. The given example shows that the calculation is feasible.

Key words: Li nard type equation; periodic solution; homeomorphism; homotopy

0 引言

本文将考虑带有 Li nard型方程的边值问题

$$\begin{cases} u''(t) + I(t, u(t), u'(t)) + \nabla G(u(t)) = f(t), \\ u(0) = u(2\pi), \\ u'(0) = u'(2\pi)。 \end{cases} \tag{1}$$

其中: $u \in \mathbf{R}^n$, $G \in \boldsymbol{C}^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $f \in \boldsymbol{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, $f(t+2\pi) = f(t)$, $I: [0, 2\pi] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$。

Li nard型方程在应用科学如动力学[1],物理学,生物学中都有着广泛的应用,因此,自 20世纪 20年代以来就有很多数学工作者运用多种方法[2-5]研究过这类方程,但前人侧重研究 Li nard型方程解的唯一性,而对方程的数值解研究甚少。自 20世纪 90年代以来,人们开始探讨使用同伦算法求解简单的 Li nard型方程周期解。前人在运用同伦算法求解 Li nard型方程的周期数值解[6-7]时,方程为: $u''(t) + \boldsymbol{C}u'(t) + \nabla G(u(t)) = f(t)$ ($\boldsymbol{C}$为常对称矩阵),其阻尼项过于简单,不切实际。当 $|c| \leqslant \frac{b}{n}\delta_1(\|a\|)$时 ($b$, n, δ_1定义见下面预备知识),满足本文定理条件。本文另辟途径,证明在定理的约束条件下使用同伦算法是可行的,最后使用不动点方法(用初值问题求解边值问题的一种解法)求解 Li nard型方程的数值解,并给出计算实例,有效地推广了前人的结果。

收稿日期: 2005-12-09;改回日期: 2006-09-02
基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金资助项目(02KSB170002)
作者简介: 许敏(1982-),女,江苏海安人,硕士,研究方向: 微分方程, bing_dc@163.com.

1 预备知识

1.1 关于 Linard型方程

设 $X = \{u(t) \mid u: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^n, u(t) = (u_i(t))_{n\times 1}, u_i \in L^2[0, 2\pi]\}$。定义内积: 对 $\forall u, v \in X$,

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} \langle u(t), v(t) \rangle \, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{2\pi} u_i(t) v_i(t) \, dt。 \tag{2}$$

则 X 为 Hilbert空间, 其范数为 $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$。

记 $D = \{u \mid u \in X, u'_i$在 $[0, 2\pi]$绝对连续, $u''_i \in L^2[0, 2\pi], u_i(0) = u_i(2\pi), u'_i(0) = u'_i(2\pi)\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$。

线性算子 $\boldsymbol{L}: D \to X$ 由 $\boldsymbol{L}u = -u''$定义, 则 L 为D 上的稠定自伴闭算子。图范数 $\||\cdot|\|: X \to \mathbf{R}$定义为 $\||u|\| = \|u\| + \|Lu\|$, $\forall u \in D$。因图范数与 Sobolev范数 $\|u\| + \|u'\| + \|u''\|$是等价的, 据 Sobolev嵌入定理[7], D 可以紧嵌入到 $C_n^1[0, 2\pi]$, 其中 $C_n^1[0, 2\pi] = \{u: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n \mid u_i$ 在 $[0, 2\pi]$有连续的一阶导数$\}$。

因为 $G(u)$有连续的二阶偏导数, 记 $\boldsymbol{Q}(u) = \dfrac{\partial^2 G(u)}{\partial x_i \partial x_j}$, 则 $\boldsymbol{Q}(u)$对 $\forall u \in \mathbf{R}^n$ 是对称阵。令

$$(\boldsymbol{N}u)(t) = -\nabla G(u(t)), \quad t \in [0, 2\pi]。 \tag{3}$$

于是 $\boldsymbol{N}$ 是连续可微的, 且有

$$\boldsymbol{L} + \boldsymbol{N}'(u) = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{Q}(u)。 \tag{4}$$

设 $\lambda_k(u)(k = 1, 2, \cdots, n)$是 $\boldsymbol{Q}(u)$在 $u \in \mathbf{R}^n$ 的特征值, 记 $\lambda_1(u) \geqslant \lambda_2(u) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(u)$。如果存在整数 N_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$N_k^2 < \lambda_k(u) < (N_k + 1)^2, k = 1, 2, \cdots, n。 \tag{5}$$

对于特征值问题

$$\boldsymbol{L}u - \boldsymbol{Q}(u_0)u = \gamma u。 \tag{6}$$

其特征值可写为 $\gamma = m^2 - \lambda_k(u_0), k = 1, 2, \cdots, n$, 其中m 为某大于等于 0的整数, u_0是 D 中的固定点。由(5)式知, 零不是(6)的特征值, 从而 $\boldsymbol{L} - \boldsymbol{Q}(u_0)$是可逆的。

据自伴算子谱理论[8]:

$$\|[\boldsymbol{L} - \boldsymbol{Q}(u_0)]^{-1}\| = \{d(0, \boldsymbol{L} - \boldsymbol{Q}(u_0)\text{的谱})\}^{-1} = (\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k(u_0) - N_k^2, (N_k + 1)^2 - \lambda_k(u_0)\})^{-1}。$$

定义: 若 w 为连续映射, 满足条件: $w: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, w(t) > 0, t > 0, \int_a^{\infty} \dfrac{ds}{w(t)} = \infty, a > 0$, 则称 $w \in \Omega$。

引理 1[9]　设 $G: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 有连续的二阶偏导数, 且 $\boldsymbol{Q}(u)$的特征值满足(5)式, 令

$$\delta(\|u\|) = \min_{t\in[0,2\pi]} \min_{\|v\|\leqslant\|u\|} \min_{1\leqslant k\leqslant n}[\lambda_k(v) - N_k^2, (N_k + 1)^2 - \lambda_k(v)], \ \delta\text{满足} \int_0^{+\infty} \delta(s)\, ds = +\infty。 \tag{7}$$

则对于每个 $f \in X$, 边界值问题

$$\begin{cases} u''(t) + \nabla G(u(t)) = f(t), \\ u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)。 \end{cases} \tag{8}$$

有唯一周期解。

引理 2[10]　设G 满足引理 1条件, 且 δ满足 $\int_0^{+\infty} \delta(s)\, ds = +\infty$, 则 $\forall u \in D$, $\boldsymbol{L} + \boldsymbol{N}'(u)$在X 上可逆, 且存在常数 k, δ_1, $\delta_1^{-1} \in \Omega$, 其中 $\delta_1^{-1}(s) = 1 + (k + 1)\delta^{-1}(s)$, 使得

$$\|\boldsymbol{N}'(u)v\| \leqslant k\|v\|, \ \forall u, v \in D,$$
$$\|[\boldsymbol{L} + \boldsymbol{N}'(u)]^{-1}\| \leqslant \delta(\|u\|)^{-1}, \ \forall u \in D,$$
$$\||[\boldsymbol{L} + \boldsymbol{N}'(u)]^{-1}h|\| \leqslant \delta_1(\|u\|)^{-1}\|h\|, \ \forall u \in D, h \in X。 \tag{9}$$

引理 3[10]　设G 满足引理 1条件, 且 δ满足 $\int_0^{+\infty} \delta(s)\, ds = +\infty$, $I: [0, 2\pi] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $I = \mathrm{col}(I_1, \cdots, I_n)$, $I_i = I_i(t, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$连续可微, 满足

$$\left|\frac{\partial I_i}{\partial x_j}(a)\right|,\left|\frac{\partial I_i}{\partial y_j}(a)\right|\leqslant\frac{b}{n}\delta_1(\|a\|),\ b<1,\ \forall a\in\mathbf{R}^n。\tag{10}$$

则对于每个 $f\in X$, 微分系统

$$\begin{cases}u''(t)+I(t,u(t),u'(t))+\nabla G(u(t))=f(t),\\u(0)=u(2\pi),\\u'(0)=u'(2\pi)。\end{cases}\tag{11}$$

存在唯一 2π 周期解。

证明要点: 当条件 (10)成立时, $L+N+I: D\to X$ 为一同胚映射。

1.2 关于同伦算法[11]

对于一般的非线性方程组 $F(u)=0$, $u\in\mathbf{R}^n$ 而言, 所谓同伦方法是用一簇映射: $H: D\times[0,1]\subset\mathbf{R}^{n\times1}\to\mathbf{R}^n$ 来代替单个映射 F, 使得 $H(u,0)=F(u)-F(u^0)$; $H(u,1)=F(u)$。其中 $u\in D$, u^0 是任给的初始向量。令 $H(u,t)=F(u)+(t-1)F(u^0)$, $u\in D$, $t\in[0,1]$。如果对每一个 $t\in[0,1]$, 方程 $H(u,t)=0$ 有解 $u=u(t)$, $u(t)$连续, 则 u 表示 $\mathbf{R}^n$ 内的一条空间曲线, 它的一个端点是初始值 $u^0=u(0)$, 而另一个端点 $u(1)=u^*$ 就是 $F(u)=H(u,1)=0$ 的解。$H(u,t)$通常被称为同伦映射。同伦算法的一个特点是: 扩大迭代法的收敛范围或者寻求足够多的初始点。

引理 4[11] 设 $F: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续可微的, 又假定对所有 $u\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{F}'(u)$是非奇异的, 还假定 F 或者是范数强制的, 或者对所有 $u\in\mathbf{R}^n$, $\|\boldsymbol{F}'(u)^{-1}\|\leqslant\beta$, 那么, 对任意的 $u^0\in\mathbf{R}^n$, 存在唯一的映射 $u: [0,1]\to\mathbf{R}^n$, 使得同伦映射 $H(u,z)=0$ 成立, 其中 $H(u,z)=Fu+(z-1)Fu^0$, 并且

$$\begin{cases}u'(z)=-\boldsymbol{F}'(u(z))^{-1}Fu^0, & \forall z\in[0,1];\\u(0)=u^0。\end{cases}\tag{12}$$

引理 4中, 条件 $\|F'(u)^{-1}\|\leqslant\beta$ 似乎很强, 可考虑用 $w(\|u\|)$代替 β, 于是给出下面引理:

引理 5[12] 设 $f: E_1\to F_1$ 是 C^1 映射, 又假设 $f'(u)\in \mathrm{Isom}(E_1,F_1)$, 对每个 $u\in E_1$, $\|f'(u)^{-1}\|\leqslant w(\|u\|)$, 这里 $w: \mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+-\{0\}$是连续的, 记 $M_u=\int_{\|u\|}^{\infty}\frac{1}{w(s)}ds$, $u\in E_1$, 则 $B(f(u),M_u)\subset f(E_1)$且存在一个开集 A_u, 使得 $f: A_u\to B(f(u),M_u)$是 C^1 微分同胚。如果 $\int_0^{\infty}\frac{1}{w(s)}ds=\infty$, 则 $A_u=E_1$ 且 $f: E_1\to F_1$ 是 C^1 全局微分同胚, E_1, F_1 为 Banach空间。

由引理 5可知, 对任意固定的 $t_0\in[0,1]$, $H(u,t_0)$是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的同胚, 从而存在唯一的 $u(t_0)$使得 $H(u(t_0),t_0)=0$, 且由于 $[H'_u(u,t)]^{-1}=[F'(u)]^{-1}$存在, 故 $u=u(t)$, $t\in[0,1]$是连续可微的。从而存在 $r_0>0$, 使得 $D_0=\{u\in\mathbf{R}^n\mid\|u-u(t)\|<r_0, t\in[0,1]\}\subset R^n$, 而 $\|f'(u)^{-1}\|\leqslant w(\|u\|)$, 所以 $[F'(u)]^{-1}$在 D_0 上有界, 即存在 $\beta>0$, 使得 $\|F'(u)^{-1}\|\leqslant\beta$, $u\in D_0$。

2 主要结论

定理 若边值问题 (11)满足引理 3条件, 则存在唯一的映射 $u: [0,1]\to\mathbf{R}^n$, 使得 $H(u,z)=0$ 成立, 且满足 (12)。

证明 令 $(Iu)(t)=-I(t,u(t),u'(t))$, $\forall t\in[0,2\pi]$。则 (11) 等价于 $Lu+Nu+Iu=-f$, 有 $[\boldsymbol{I}'(u)v](t)=-\left[\frac{\partial I_i}{\partial x_j}u(t)\right]v(t)-\left[\frac{\partial I_i}{\partial y_j}(u(t))\right]v'(t)$, $\forall u,v\in D$, $t\in[0,2\pi]$, 由 (10)式可得,

$$\|\boldsymbol{I}'(u)v\|\leqslant n\cdot\frac{b}{n}\delta_1(\|u\|)(\|v\|+\|v'\|)\leqslant b\delta_1(\|u\|)\|\,|v|\,\|。\tag{13}$$

因为 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}'(u)+\boldsymbol{I}'(u)=(\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{I}'(u)[\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}'(u)]^{-1})(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}'(u))$, 这里及下面提及的 $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 维单位矩阵。

令 $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{I}'(u)[\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}'(u)]^{-1}$, 由 (9)和 (13)式可知, $\forall h\in X$,

$$\|\boldsymbol{P}h\|=\|\boldsymbol{I}'(u)[\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}'(u)]^{-1}h\|\leqslant b\delta_1(\|u\|)\|\,|[\boldsymbol{L}+\boldsymbol{N}'(u)]^{-1}h|\,\|\leqslant$$
$$b\delta_1(\|u\|)\cdot\delta_1(\|u\|)^{-1}\|h\|=b\|h\|,$$

即 $\|P\|\leqslant b<1$, 故 I_n+P 可逆, 且 $\|(I_n+P)^{-1}\|\leqslant(1-b)^{-1}$, 又 $L+N'(u)$ 非奇异, 所以对特征值问题 $Lu+N'(u_0)u+I'(u_0)u=ru$ 中 $r\neq 0$, 所以 $L+N'(u)+I'(u)$ 可逆且非奇异, 且有

$$[L+N'(u)+I'(u)]^{-1}=[L+N'(u)]^{-1}(I_n+P)^{-1}。\tag{14}$$

由 (9)和 (14)可知, $\|[L+N'(u)+I'(u)]^{-1}\|\leqslant(1-b)^{-1}\delta(\|u\|)^{-1}$,

令 $\delta_2(s)=(1-b)\delta(s)$, 则 $\delta_2^{-1}\in\Omega$, 且有

$$\|[L+N'(u)+I'(u)]^{-1}\|\leqslant\delta_2(\|u\|)^{-1}。\tag{15}$$

令 $F(u(t))=Lu+Nu+Iu+f(t)$, $u\in\mathbf{R}^n$, $F(u)\in\mathbf{R}^n$, $F(u)$连续可微, $F'(u)=L+N'(u)+I'(u)$且 $F'(u)$非奇异, $\|[F'(u)]^{-1}\|\leqslant\delta_2(\|u\|)^{-1}$。

因为 F 满足引理 4所有条件, 所以存在唯一映射 $u:[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 使 $H(u,z)=0$成立。

$$H(u,z)=Fu+(z-1)Fu^0=Lu+Nu+Iu+f+(z-1)(Lu_0+Nu_0+Iu_0+f)。$$

3 算法及应用算例

参照文献 [6-7]中所用方法, 利用初值问题方法求解边值问题。

考虑初值问题

$$\begin{cases}u''(t)+\nabla G(u(t))+I(t,u,u')=f(t),\\ u(0)=\alpha,\\ u'(0)=\beta。\end{cases}\tag{16}$$

记其解为 $u(t,\alpha,\beta)=u(t,x_0)$, 其中 $x_0=(\alpha,\beta)^T$。定义 $f_1:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f_1(x)=(u(2\pi,x),u'(2\pi,x))^T$, 记 $F(x)=f_1(x)-x$。由解对初值的连续性定理可知 $f_1(x)$连续可微, 所以 $F(x)$也连续可微。显然, 求解方程 (11)有周期解等价于求解 $f_1(x)$有不动点, 亦即非线性方程组 $F(x)=0$的解。

问题 (16)等价于

$$\begin{cases}w_1'(t)=A(w_1(t))+E(t),\\ w_1(0)=x_0=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}。\end{cases}\tag{17}$$

其中: $w_1(t)=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$, $v=u'$, $A(w_1)=\begin{pmatrix}v\\ -\nabla G(u)-I(t,u,u')\end{pmatrix}$, $E(t)=\begin{pmatrix}0\\ e(t)\end{pmatrix}$。将 (17)即边值问题 (16)的解记为 $\begin{pmatrix}u(2\pi,x_0)\\ u'(2\pi,x_0)\end{pmatrix}$, 由 (16)可知, 可以用差分法求出该解。

$$F(x_0)=f_1(x_0)-x_0=\begin{pmatrix}u(2\pi,x_0)\\ u'(2\pi,x_0)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}。$$

所以 $F'(x_0)=f_1'(x_0)-I$。记 $A=F'(x_i)$, 则 $F=f_1'(x_i)-I$。$f_1(x)$的 Jacobi矩阵为 $f_1'(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\beta}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\beta}\end{pmatrix}$。为了避免计算过程中每次都计算 Jacobi矩阵 $f_1'(x)$, 可使用拟牛顿法求 $A_{i+1}=A_i+\Delta A$。

令 $\Delta x=x_{i+1}-x_i$, $\Delta F=F(x_{i+1})-F(x_i)$, 则 $\Delta A=(\Delta F-A_i\Delta x)\dfrac{\Delta x^T}{\Delta x^T\Delta x}$, 从而大大减少了计算量。当 A_{i+1} 出现奇异时, 可以用阻尼牛顿法来加大对角元, 使之非奇异。

(12)式的解 $u=u(z)$是式 (10)的解的同伦路径。作变换 $e^{-t}=1-\lambda$, 结合 $H(u,z)=0$, 可使 (12)变为:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-[F'(u)]^{-1}Fu,\\ u(0)=u_0。\end{cases}\tag{18}$$

具体算法如下:

(1) 任取 x_0, 用差分法得出式(17)的解$\begin{pmatrix} u(2\pi, x_0) \\ , \\ u'(2\pi, x_0) \end{pmatrix}$, 求出 $F(x_0)$。

(2) 用拟牛顿法求出 $\boldsymbol{F}'(x_0)$。

(3) 对式(18)使用 Newton迭代算法求出 x_1, 设定容许误差为 10^{-5}, 若 $\|x_1 - x_0\| \leqslant 10^{-5}$, 则 x_1 即为边值问题(10)的周期解, 否则转(1)。

例 求方程 $u''(t) + \nabla G(u(t)) + I(t, u(t), u'(t)) = 2 + \sin t$(其中 $\nabla G(u) = 2u + 0.5\sin u$, $I(t, u, u') = 0.1u + 0.1u'$)的周期解。

解 $Lu + Nu = -u'' - 2u - 0.5\sin u$, $N'(u) = -2 - 0.5\cos u$, 设 $Q(u)$的特征值为 λ, 有 $1^2 < 1.5 \leqslant \lambda \leqslant 2.5 < 2^2$。$\|N'(u)\| \leqslant k = 2.5$, 因为 $\delta(\|u\|) = \min\limits_{t\in[0, 2\pi]} \min\limits_{\|v\|\leqslant\|u\|} \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} [\lambda_k - N_k^2, (N_k + 1)^2 - \lambda_k] = 0.5$, $\delta_1^{-1}(s) = 1 + (k + 1)\delta^{-1}(s) = 8$, 所以 $\delta_1 = \dfrac{1}{8}$, 令 $b = \dfrac{8}{9}$, 此时 $n = 1$, $\left|\dfrac{\partial I_i}{\partial x_j}(a)\right|$, $\left|\dfrac{\partial I_i}{\partial y_j}(a)\right| = \dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{b}{n}\delta_1(\|a\|) = \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{9}$, 显然满足条件。而 $\delta_2(s) = (1 - b)\delta(s)$, $\|[\boldsymbol{L} + \boldsymbol{N}'(u) + \boldsymbol{I}'(u)]^{-1}\| \leqslant \delta_2(\|u\|)^{-1} = \left(\dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 18$。方程满足引理 3的所有条件, 进而满足定理条件, 所以边值问题仅存在唯一周期解且可用同伦算法求解。

任取初值 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 根据上面具体算法, 可以迭代求解得到 2π 周期解的初值为 $u(0) = 0.974\ 165\ 8$, $u'(0) = -4.744\ 366\ 1$。在得到初值解的基础上, 对于其周期解的整体分布可以借助 matlab分析。

参考文献:

[1] 赵瑞星. 对称不稳定的非线性问题和对称型重力惯性波的非线性周期解[J]. 大气科学, 1994, 18(4): 437-441.

[2] Lazer A C, Sanchez D A. On periodically perturbed conservative systems[J]. Mich Math J, 1969, 16: 193-200.

[3] Brown K J, Lin S S. Periodically perturbed conservative systems and a global inverse function theorem[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1980, 4(2): 193-201.

[4] 周伟灿, 邹兰军. 型方程周期解的存在性[J]. 南京气象学院学报, 2005, 28(5): 657-661.

[5] Shen Zuhe, Wolfe M A. On the existence of periodic solutions of periodically perturbed conservative systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 153: 78-83.

[6] 徐庆. 用微分连续法求解 Duffing方程的 2π 周期解[J]. 吉林大学自然科学学报, 1990(3): 1-6.

[7] 李维国, 张丹青. 用微分连续法求解 Newton运动方程[J]. 石油大学学报, 1996, 20(5): 100-104.

[8] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators[M]. Vol II. New York: Interscience, 1963.

[9] Shen Zuhe. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1989, 13(2): 145-149.

[10] 曹菊生. 非保守系统牛顿方程组的周期解[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 1997, 20(2): 8-11.

[11] 奥特加 J M, 莱因博尔特 W C. 多元非线性方程组迭代解法[M]. 朱季纳, 译. 北京: 科学出版社, 1983.

[12] Cristee M. A note on global inversion theorem and application to differential equations[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1981, 5(2): 155-161.