

## 湿空气动力学理论及应用研究进展



**通信作者简介:**高守亭,研究员/博士生导师,兼任中国科学院大学岗位教授。主要从事中尺度动力学及天气学方面的研究。迄今,共在国内外核心期刊发表学术论文200余篇,其中100余篇为SCI(E)收录论文,出版专著5部。曾荣获中国科学院自然科学奖二等奖(第一完成人)、中国气象学会大气科学基础研究成果奖二等奖(第一完成人)、2008年中国科学院奥运先进个人、中国科学院大学优秀教师等荣誉。



**通信作者简介:**周玉淑,研究员/博士生导师,兼任中国科学院大学岗位教授。主要从事天气学、中尺度气象学及高影响天气数值模拟及预报等方面的研究。迄今,共在国内外核心期刊发表学术论文90余篇,其中40余篇为SCI(E)收录论文。曾荣获中国科学院院长奖学金优秀奖、北京气象学会优秀论文奖、中国气象学会大气科学基础研究成果奖二等奖(第三完成人)等。

\* 联系人, E-mail: gst@mail.iap.ac.cn

\*\* 联系人, E-mail: zys@mail.iap.ac.cn

2019-10-18 收稿, 2019-11-15 接受

吉林省科技发展计划项目(20180201035SF);

国家自然科学基金资助项目(41875056;

41975137); 中国气象局乌鲁木齐沙漠气象研

究所专项资金项目(IDM2019007); 2019年新疆

维吾尔自治区高层次柔性人才项目

高守亭<sup>①②④\*</sup>, 周玉淑<sup>①②③\*\*</sup>, 冉令坤<sup>①②</sup>

① 中国科学院 大气物理研究所 云降水物理与强风暴院重点实验室(LACS), 北京 100029;

② 中国科学院大学, 北京 100049;

③ 中国气象局 乌鲁木齐沙漠气象研究所, 新疆 乌鲁木齐 830002;

④ 贵州省山地气候与资源实验室, 贵州 贵阳 550002

**摘要** 回顾了湿空气热动力学研究进展,对未饱和湿大气、饱和湿大气及非均匀饱和湿大气的动热力方程、能量方程、连续方程等进行了梳理,指出饱和湿空气动量方程与非均匀饱和湿空气动量方程的最大区别在于对凝结过程的处理不同。饱和湿大气中,由于大气均是饱和的,由饱和造成的水凝物可处处出现,不能区分真正发生水汽凝结的区域。而非均匀饱和湿空气中,凝结发生与相对湿度的幂次方有关(即与凝结概率函数的分布有关),在相对湿度较小的区域不会出现水汽凝结,凝结区与非凝结区可自动区别,其描述的凝结过程与实际大气更接近。同时,总结了湿大气水汽凝结饱和非均匀分布的动热力学物理量在高影响天气分析中的应用,最后讨论了未来推进湿空气动力学研究需重点考虑的一个内容。

**关键词** 湿空气;非均匀饱和;研究进展;理论和应用

对于干大气来说,大都属于中性或稳定状态,不存在绝对不稳定的状态,因此干大气中很少有强对流发生。干大气中只有动能、内能和位能以及它们之间的相互转换,而湿大气则明显不同。由于水汽的存在及其凝结和升华会产生潜热、云及降水,这些过程会影响到大气的稳定度,是对流发生的基本条件。所以,对湿空气动力学研究进展进行总结梳理,对于气象学者进一步研究湿大气的各种天气现象的发生发展机理、预报及人工影响天气等方面均有重要意义。

## 1 未饱和湿空气的动热力方程

未饱和的湿空气在大气中起什么作用,对哪些物理量会产生影响,是气象工作者应当首先了解的科学问题。首先从湿空气的密度上看,其定义为(Dutton, 1976)

$$\rho_m = \frac{m_d + m_v}{V} = \rho_d + \rho_v \quad (1.1)$$

其中: $\rho_m$  是未饱和湿空气密度; $\rho_d$  是干空气密度; $\rho_v$  是水汽密度; $m_d$  为干空气质量; $m_v$  是湿空气质量; $V$  是体积。

根据 Dutton 定律,即混合气体中各自服从自己的状态方程,于是有,

**引用格式:**高守亭,周玉淑,冉令坤,2020.湿空气动力学理论及应用研究进展[J].大气科学学报,43(1):169-180.

Gao S T, Zhou Y S, Ran L K, 2020. Advances in the kinetic thermodynamics of moist air and their application[J]. Trans Atmos Sci, 43(1): 169-180. doi: 10. 13878/j.cnki.dqkxxb.20191018012. (in Chinese).

$$P_d = \rho_d R_d T_d, \quad (1.2)$$

下标 d 表示干空气。由于水汽和空气充分混合,有  $T_d = T_v = T$ ,  $v$  表示水汽。  $P_d$  是干空气气压,  $e$  是水汽压, 由 (1.2) 可知未饱和湿空气气压为

$$p_m = p_d + e = \rho_m R_d \left[ \frac{1 + (m_v/m_d)(R_v/R_d)}{1 + (m_v/m_d)} \right] T. \quad (1.3)$$

其中:  $p_m$  是未饱和湿空气气压;  $m_d$  干空气质量;  $m_v$  是水汽质量。

定义  $\gamma = \frac{m_v}{m_d}$  为混合比(混合比  $\gamma$  一般最大只有  $40 \text{ kg}^{-1}$ , 所以  $\gamma \ll 1$ ), 则有

$$p_m = \rho_m R_d \left( 1 + \frac{0.61\gamma}{1+\gamma} \right) T. \quad (1.4)$$

这里  $R_v/R_d$  是分子质量的比, 即分子质量  $\frac{\mu_d}{\mu_v} = \frac{28.97}{18.002} = 1.61$ ,

通常还定义  $q = \frac{\gamma}{1+\gamma}$  为比湿。

对未饱和湿空气来说, 比湿  $q < 1$ , 所以有

$$p_m = \rho_m R_d (1 + 0.61q) T. \quad (1.5)$$

定义未饱和湿空气气体常数为

$$R_m = (1 + 0.61q) R_d. \quad (1.6)$$

(1.5) 式就变为

$$p_m = \rho_m R_m T. \quad (1.7)$$

但在气象学领域不使用  $R_m$ , 而是选用

$$T_v = (1 + 0.61q) T. \quad (1.8)$$

这里  $T_v$  为虚温。

于是未饱和湿空气状态方程可写为

$$p_m = \rho_m R_d T_v. \quad (1.9)$$

对连续性方程, 有  $m_v = \rho_v V$  ( $V$  为体积), 且有

$$\frac{1}{V} \frac{dm_v}{dt} = \frac{d\rho_v}{dt} + \frac{\rho_v}{V} \frac{dV}{dt}. \quad (1.10)$$

于是有

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{V} \frac{dm_v}{dt}. \quad (1.11)$$

这里利用了  $\frac{d \ln V}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ 。

对于空气来说  $\frac{dm_d}{dt} = 0$ , 而对未饱和湿空气则不

如此, 因为

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_v}{m_d + m_v} \right) = - \frac{m_d}{(m_d + m_v)^2} \frac{dm_v}{dt} = \frac{1-q}{m_d + m_v} \frac{dm_v}{dt}. \quad (1.12)$$

这里的  $q$  是比湿。对未饱和湿空气, 因无相变发生, 所以  $q$  是个守恒量, 于是有

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\rho_m}{1-q} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (1.13)$$

则水汽的连续性方程为

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.14)$$

其形式与干空气相同, 这样与干空气连续性方程合并则有

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.15)$$

由于未饱和湿空气没有相变, 所以质量守恒, 则运动服从牛顿第二定律, 因此, 运动方程表示为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho_{mv}} \nabla p_m + g + \mathbf{F}. \quad (1.16)$$

这里的  $\mathbf{F}$  是摩擦力。

对热力能量方程, 有如下考虑。其中内能可写为

$$I_m = m_d e_d + m_v e_v. \quad (1.17)$$

这里的  $e_d$  和  $e_v$  分别是干空气与水汽的单位质量内能, 由于

$$C_{vm} = \left( \frac{\partial I_m}{\partial T} \right)_v = m_d \left( \frac{\partial e_d}{\partial T} \right)_v + m_v \left( \frac{\partial e_v}{\partial T} \right)_v = m_d C_{vd} + m_v C_{vv}. \quad (1.18)$$

这里的  $C_{vm}$  是定体比热。因此, 可得

$$C_{vm} = \frac{C_{vd}}{1+\gamma} + C_{vv}. \quad (1.19)$$

同样可求出

$$C_{pm} = \frac{1}{1+\gamma} C_{pd} + \frac{\gamma}{1+\gamma} C_{pv}. \quad (1.20)$$

对水汽来说  $C_{vv} = 1.35 \times 10^7 \text{ erg/g.deg}$  并且  $C_{pv} = 1.81 \times 10^7 \text{ erg/g.deg}$ ,

这样就有

$$C_{vm} = \frac{1}{1+\gamma} C_{vd} (1 + 1.89\gamma) = C_{vd} (1 + 0.89q). \quad (1.21)$$

且

$$C_{pm} = C_{pd} (1 + 0.81q). \quad (1.22)$$

因此, 热力能量方程可写为

$$C_{vd} (1 + 0.89q) \frac{dT}{dt} + p_m \frac{d\alpha_m}{dt} = \dot{Q}. \quad (1.23)$$

$\dot{Q}$  表示加热率。(1.23) 便是未饱和湿空气的热力能量方程。

所以,未饱和湿空气的方程组归结为:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\xi_m} \nabla p_m + \mathbf{g} + \mathbf{F},$$

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$C_{vd}(1+0.89q) \frac{dT}{dt} + p_m \frac{d\alpha_m}{dt} = \dot{Q},$$

$$p_m = \rho_m R_d T_v.$$

要说明的一点是,未饱和湿空气的空气密度要小于干空气的密度,这一点从状态方程可以推出。由状态方程  $P_m = \rho_m R_d (1+0.61q) T$  可知,  $\rho_d = \rho_m (1+0.61q)$ , 所以  $\frac{\rho_d}{\rho_m} = 1+0.61q$ 。这一点很重要,因在相对湿度增高时,湿空气密度减少会造成气压梯度加大引起湿急流。关于湿空气热力学更普遍的研究结果,有兴趣的读者可参考《暴雨与暴雨之气象学》(吉崎正宪和加藤辉之,2009)一书及 Andrews (2000)的《大气物理介绍》一书。

## 2 饱和湿空气的研究

饱和湿空气中由于存在相变与升华含有水汽,液态水及冰晶所以十分复杂,国内外在该方面多年来有许多学者都在深入探讨和追求。但由于过于复杂,至今在该方面的研究也没有一个公认的十分成功的方法与结果。早在19世纪七八十年代,我国资深学者谢义炳就带着一批年轻学者对饱和湿空气进行研究,探讨了暴雨天气动力学的问题,提出了湿斜压天气和动力学中的一些基本问题(罗汇邦和王两铭,1978;王两铭和罗汇邦,1978),给出了饱和湿空气动力学方程组和主要特征。谢义炳(1978)写出了《湿斜压天气的天气动力学》一书。与此同时,雷雨顺等(1978)用不稳定能量理论研究了夏季强风暴并提出一种分析和预报方法,还探讨了与特大暴雨有关的几个问题(雷雨顺,1980)。刘栋和高守亭(2003)研究了饱和湿大气魏萨拉频率及修正的相当位温。Ran et al.(2014)研究了湿大气的基本方程组。这些研究都与饱和湿空气有关,主要集中在19世纪七八十年代,是我国研究饱和湿空气的典型代表结果,这些研究成果为饱和湿空气的研究作出了重要贡献。在湿空气动力学方面,国外也有很多研究,如 Satoh(2003)研究了湿过程的对流方案,证明了湿大气可压缩非静力模式中的守恒格式。Ooyama(1990,2001)研究了湿大气的热动力学及位

涡,同时研究了饱和湿大气的热动力学。Betts and Dugan(1973)研究了饱和湿大气中的相当位温。Bolton(1980)进一步研究了湿大气中相当位温的计算。Durran and Klemp(1982)研究湿空气的魏萨拉频率。Bannon(2002)给出了饱和湿空气的理论动力框架。Andrews(2002)给出了水汽凝结过程中所需的自由能。这些国内外的研究为加深和理解饱和湿空气的作用本质及相变过程有重要的贡献,推进了饱和湿空气热力和动力学的发展。在国内外前人研究成果的基础上,以下总结给出饱和湿空气基本方程组和饱和湿空气的热动力学方程组,为饱和湿空气的研究进一步奠定扎实的基础。

### 2.1 潜热和饱和水汽压

在推导饱和湿空气的热动力学方程之前,先介绍潜热和饱和水汽压。依据 Kirchhoff 定律和 Clausius-Clapeyron 方程知:

$$\frac{dL}{dT} = C_{pv} - C_l, \quad \frac{dp^*}{dT} = \frac{Lp^*}{R_v T^2}. \quad (2.1)$$

其中: $L$ 是潜热; $C_{pv}$ 是气压不变下的水汽比热; $C_l$ 是液态水比热; $p^*$ 是饱和水汽压。

对(2.1)式进行积分后有:

$$L = L_0 + (C_{pv} - C_l)(T - T_0) = L_{oo} + (C_{pv} - C_l)T. \quad (2.2)$$

$$p^*(T) = p_0^* \left(\frac{T}{T_0}\right)^{(C_{pv}-C_l)/R_v} \exp\left[\frac{L_{oo}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]. \quad (2.3)$$

其中  $L_{oo} = L_0 + (C_{pv} - C_l)T_0$ 。

在某些数值模式中,潜热及饱和水汽压分别采取了简化形式,即  $L = L_0$ ,则有

$$p^*(T) = p_0^* \exp\left[\frac{L_0}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]. \quad (2.4)$$

这里的  $L_0$  是在  $0^\circ\text{C}$  时的潜热。

### 2.2 饱和湿空气的热动力学方程

仅对湿空气而言,其状态方程为

$$p = \rho(m_d R_d + m_v R_v) T. \quad (2.5)$$

用  $m_d$  表示干空气质量浓度; $m_v$  表示水汽质量浓度; $m_e$  为液态水质量浓度,且  $m_d + m_v + m_e = 1$ ,在质量中水物质浓度为  $m_w = m_v + m_e$ ,且  $m_e$  包含云水和雨水,即  $m_e = m_c + m_r$ ,这里  $m_c$  和  $m_r$  分别是云水和雨水质量浓度。

下面考虑焓,内能及熵的表达式。焓,内能及熵分别表达为

$$h = m_d h_d + m_v h_v + m_l h_l. \quad (2.6)$$

$$e = m_d e_d + m_v e_v + m_l e_l. \quad (2.7)$$

$$S = m_d s_d + m_v s_v + m_l s_l. \quad (2.8)$$

其中:  $h_d = C_{pd}T, h_v = C_{pv}T + L_{oo}, h_1 = C_1T, e_d = C_{vd}T, e_v = C_{vv}T + L_{oo}, e_1 = C_1T$ 。

并且,

$$S_d = C_{pd} \ln \frac{T}{T_0} - R_d \ln \frac{P_d}{P_0} = C_{vd} \ln \frac{T}{T_0} - R_d \ln \frac{\rho_d}{\rho_0} \quad (2.9)$$

$$S_v = C_{pv} \ln \frac{T}{T_0} - R_v \ln \frac{P_v}{P_0^*} + \frac{L_0}{T_0} \quad (2.10)$$

$$S_1 = C_1 \ln \frac{T}{T_b} \quad (2.11)$$

对应饱和湿空气的熵为  $S_v^*$

$$S_v^* - S_1 = (C_{pv} - C_1) \ln \frac{T}{T_0} - R_v \ln \frac{P^*}{P_0^*} + \frac{L_0}{T_0} \quad (2.12)$$

方程(2.12)就是饱和湿空气的热力学方程。

### 2.3 饱和湿空气的连续性方程

干空气密度为  $\rho_d$ , 水汽密度为  $\rho_v$ , 雨滴密度为  $\rho_r$ , 则有连续性方程为(Ooyama, 2001):

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_d \mathbf{V}_H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_d W) = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \mathbf{V}_H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_v W) = -Q_r \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_r \mathbf{V}_H) + \frac{\partial}{\partial z} [\rho_r (W + W_T)] = Q_r \quad (2.15)$$

其中:  $\mathbf{V}_H$  是水平风速;  $W_T$  是雨滴下落末速度;  $Q_r$  是水汽凝结产生的源汇项。方程(2.13)、(2.14)和(2.15)相加可得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho W + \rho_r W_T) = 0 \quad (2.16)$$

这是 Ooyama(2001) 给出的连续方程。这里的问题是, 饱和湿空气不应包括水物质, 所以饱和湿空气的密度应为  $\rho_m = \rho_d + \rho_v$ 。而水物质是高度不可压的, 所以应有  $\frac{d\rho_r}{dt} = 0$ 。

这样就有

$$\frac{d\rho_d}{dt} + \rho_d \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \nabla \cdot \mathbf{V} = -Q_r \quad (2.18)$$

$$\frac{d\rho_r}{dt} + \rho_r \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_r W_T) = Q_r \quad (2.19)$$

由于  $\frac{d\rho_r}{dt} = 0$ , 即水物质为高度不可压流体。则方程

(2.17)、(2.18)和(2.19)相加的结果为

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho_r \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_r W_T) = 0 \quad (2.20)$$

如果忽略雨滴密度沿垂直方向上的变化, 则有

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{V} = -\rho_r \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_r W_T) \quad (2.21)$$

方程(2.21)才是饱和湿空气的连续性方程。由于水汽凝结及水平方向的辐散辐合, 加之垂直运动的变化, 结果造成饱和湿空气出现明显的质量不守恒。

### 2.4 饱和湿空气的动量方程

对饱和湿空气也同样遵循动量守恒定律, 即动量的个别变化等于所有力之和, 其数学表达式为

$$\frac{d(m\mathbf{V})}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \text{ 进而可展开为}$$

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{V} \frac{dm}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.22)$$

其中  $\mathbf{F}_i$  代表某种力, 如气压梯度力、重力等。

从(2.22)式便可看出, 如果  $\frac{dm}{dt} = 0$  则为干空气

的动量方程形式, 在饱和湿空气中  $\frac{dm}{dt} \neq 0$ , 这是由连续性方程来表达的。由此可得出, 只要用质量守恒下的(这是一种假设)运动方程, 同连续性方程相结合即可得到动量方程(2.25)。所以在运动方程两边乘以饱和湿空气的密度  $\rho_m$ , 并与乘以速度  $\mathbf{V}$  的饱和湿空气连续性方程相结合便可得到饱和湿空气的水平动量方程为:

$$\frac{\partial(\rho_m \mathbf{V}_H)}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\rho_m \mathbf{V}_H \mathbf{V}_H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m \mathbf{V}_H W + \rho_r \mathbf{V}_H W_T) = -\nabla_H P + \rho_m \mathbf{F}_H - \mathbf{V}_H \rho_r \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.23)$$

而垂直方向上的动量方程可写为

$$\frac{\partial(\rho_m W)}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\rho_m W \mathbf{V}_H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m W W + \rho_r W W_T) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_m g - W \rho_r \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{F}_z \quad (2.24)$$

这里的  $W$  是垂直速度,  $\mathbf{F}_H$  及  $\mathbf{F}_z$  分别表示水平及垂直方向上的摩擦力。

### 2.5 饱和湿空气的能量方程

Ooyama(2001) 给出了饱和湿空气的能量方程, 具体写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(K+\Phi) + \nabla \cdot [(K+\Phi+P) \mathbf{V}_H] + \\ & \frac{\partial}{\partial z} [(K+\Phi+P) W + (K_r + \Phi_r)(W+W_T)] = \\ & P \left( \nabla \cdot \mathbf{V}_H + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + g \rho_r (W+W_T). \quad (2.25) \end{aligned}$$

其中:  $K = \rho_m (V_H^2 + W^2)/2$ ;  $\Phi = g \rho_m z$ ,  $K_r = \rho_r (V_H^2 + W^2)/2$ ;  $\Phi_r = \rho_r g z$ 。

## 2.6 饱和湿空气的位涡方程

首先,重写饱和湿空气的连续方程为 (Schubert et al., 2001)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V} + \rho_r W_T \mathbf{k}) = 0. \quad (2.26)$$

这里  $W_T$  是雨滴相对于饱和湿空气的速度,  $\rho_r \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  被略去。

其动量方程可简写为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{V} + \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) + \frac{1}{\rho_m} \nabla P = \mathbf{F}. \quad (2.27)$$

在此基础上,利用  $\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \wedge \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{b})$  及  $\nabla \cdot (A \mathbf{a}) = A \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla A$ 。这里  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  是任意一矢向量。令  $\mathbf{a} = \nabla \Psi$ ,  $\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$ 。于是有

$$\nabla \cdot \left( \nabla \Psi \wedge \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) = -\nabla \Psi \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}。 \text{ 因为 } \nabla \wedge \nabla \Psi = 0, \text{ 这里}$$

$\boldsymbol{\xi} = z \boldsymbol{\Omega} + \nabla \wedge \mathbf{V}$  是绝对涡度。如果选  $A = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$  并且  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\xi}$ ,

$$\text{于是有 } \nabla \cdot \left[ \boldsymbol{\xi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right] = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right), \text{ 因为 } \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0。$$

由这两个结果的差可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi) + \nabla \cdot \left( \nabla \Psi \wedge \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \boldsymbol{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.28)$$

定义  $\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Psi$ , 并利用关系式

$$\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \Psi) = \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi) + \nabla \Psi \wedge (\boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{V}),$$

则有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi) + \nabla \cdot \left[ \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi) + \nabla \Psi \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{V} \right) \right] = \\ & \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \dot{\Psi}. \quad (2.29) \end{aligned}$$

利用连续性方程消去  $\nabla \cdot \mathbf{V}$ , 则由方程 (2.32) 可得

$$\begin{aligned} & \rho_m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho_m} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi \right) + \nabla \cdot \left[ \nabla \Psi \wedge \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{V} \right) \right] = \\ & \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \dot{\Psi} + \left( \frac{1}{\rho_m} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi \right) \nabla \cdot (\rho_r W_T \mathbf{k}). \quad (2.30) \end{aligned}$$

方程 (2.33) 与动量方程相结合, 且由于

$\nabla \cdot (\nabla A \wedge \nabla B) = 0$  对任何标量函数  $A$  和  $B$  都适用。那么, 方程 (2.30) 式可约化到

$$\begin{aligned} & \rho_m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho_m} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi \right) = \frac{1}{\rho_m} \nabla \Psi \cdot (\nabla \rho_m \wedge \nabla P) + (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \\ & \nabla \Psi + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \dot{\Psi} + \left( \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \Psi \right) \nabla \cdot (\rho_r W_T \mathbf{k}). \quad (2.31) \end{aligned}$$

若标量函数  $\Psi$  取为饱和湿空气位温, 其定义为

$$\theta_e = \theta \exp \left( \frac{L q_s}{c_p T} \right). \quad (2.32)$$

那么 (2.34) 式即变为

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho_m} [ (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \nabla \theta_e + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \dot{\theta}_e + P \nabla \cdot (\rho_r W_T \mathbf{k}) ]. \quad (2.33)$$

方程 (2.33) 式就是饱和湿空气的位涡方程, 或叫作有质量强迫的位涡方程。其中  $P = \frac{1}{\rho_m} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \theta_e$  为饱和湿空气位涡。

## 3 非均匀饱和湿大气的研究

### 3.1 非均匀饱和湿空气

实际大气既不是处处都是干空气, 也不是处处都是饱和湿空气, 纯干大气和纯饱和湿大气只是两种极端情况。实际大气是由干空气及水汽组成, 在温压适合条件有些地方水汽饱和了, 有的地方水汽没有饱和即是非均匀饱和湿大气, 这种非均匀饱和不仅在较大的空间范围内, 即使在云里, 在雾里饱和也是不均匀的, 所以通常会出现轻雾和浓雾, 它们当中水汽的饱和程度是不一样的也是非均匀的。非均匀饱和概念以往在国际上是没有的, 可以说是我国气象学家的原创性成果。最早提出这一概念的是安徽省气象科学研究所的王兴荣研究员, 并在该方向发表了相关论文 (王兴荣和吴可军, 1995; 王兴荣等, 1997, 1999; 王兴荣和魏鸣, 2007), 以下介绍非均匀饱和和大气运动方程组。

### 3.2 非均匀饱和湿大气中的热力学方程

非均匀饱和和大气中释放的凝结潜热可表示为

$$\delta Q = -L \delta (q_s \cdot \left( \frac{q}{q_s} \right)^k). \quad (3.1)$$

其中:  $q_s$  是饱和比湿;  $q$  是实际比湿;  $\frac{q}{q_s}$  是相对湿度;

$k$  值取为 9, 即水汽的凝结过程是随着相对湿度的增加而增加。在常态情况下, 由于大气中存在着凝结核 (气溶胶), 一般相对湿度达到 78% 时就出现凝

结,出现凝结时会有潜热释放,因此凝结潜热表示成(3.1)式的形式,  $(\frac{q}{q_s})^k$  就是凝结概率函数。根据热力学第一定律则有

$$C_{p_m} \delta(\ln T) - R_m \delta(\ln P) = \frac{\delta Q}{T} = -\frac{L \delta(q_s \cdot (\frac{q}{q_s})^k)}{T} \quad (3.2)$$

这里  $C_{p_m}$  和  $R_m$  分别是湿空气的等压比热和湿空气的气体常数。方程(3.2)可进一步写成

$$\delta [C_{p_m} \ln T - R_m \ln P + \frac{L q_s \cdot (\frac{q}{q_s})^k}{T}] = 0 \quad (3.3)$$

对(3.3)式进行积分,并利用  $\kappa = \frac{R_m}{C_{p_m}}$  且取指数运算,可得

$$\theta^*(T, P, q) = T \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\kappa} \exp\left[\frac{L q_s \cdot (\frac{q}{q_s})^k}{C_{p_m} T}\right] \quad (3.4)$$

$$\text{即 } \theta^*(T, P, q) = \theta \exp\left[\frac{L q_s \cdot (\frac{q}{q_s})^k}{C_{p_m} T}\right] \quad (3.5)$$

因非均匀饱和湿空气的熵  $S^*$  可表示为

$$S^* = C_{p_m} \ln \theta^* \quad (3.6)$$

则熵的个别变化等于加热率,因此有

$$C_{p_m} \frac{T d\theta^*}{\theta^* dt} = \dot{Q}_m \quad (3.7)$$

方程(3.7)便是非均匀饱和湿大气的热力方程。

### 3.3 非均匀饱和湿大气中的连续性方程

非均匀饱和湿空气中的干空气有

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \nabla_H \cdot \rho_d \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_d W) = 0 \quad (3.8)$$

对水汽而言仍有

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla_H \cdot \rho_v \mathbf{V} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_v W_T) = -Q_v \quad (3.9)$$

对水凝物而言(主要是雨滴)有

$$\frac{d[\rho_r (\frac{q}{q_s})^k]}{dt} + \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \nabla_H \cdot \mathbf{V}_H + \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \frac{\partial W}{\partial z} + \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \frac{\partial W_T}{\partial z} = Q_v \quad (3.10)$$

由于雨滴是高度不可压的,故  $\frac{d[\rho_r (\frac{q}{q_s})^k]}{dt} = 0$ , 则

(3.10)式为

$$\rho_r (\frac{q}{q_s})^k \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \frac{\partial W_T}{\partial z} = Q_v \quad (3.11)$$

方程(3.8), (3.9)及(3.11)相加则有非均匀饱和湿空气连续性方程为

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} = -\rho_r (\frac{q}{q_s})^k \nabla \cdot \mathbf{V} - \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \frac{\partial W_T}{\partial z} \quad (3.12)$$

### 3.4 非均匀饱和湿大气中的动量方程

非均匀饱和湿空气中的动量方程与饱和湿空气的动量方程形式相似,但在含有  $\rho_r$  的项中要加上凝结概率函数  $(\frac{q}{q_s})^k$ , 如此,则有水平动量方程为

$$\frac{\partial(\rho_m V_H)}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\rho_m V_H V_H) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m V_H W + \rho_r (\frac{q}{q_s})^k V_H W_T) = -\nabla_H P + \rho_m F_H - V_H \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \nabla \cdot \mathbf{V}_H \quad (3.13)$$

而其垂直方向上的动量方程为

$$\frac{\partial(\rho_m W)}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\rho_m W V_H) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m W W + \rho_r (\frac{q}{q_s})^k W W_T) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_m g - W \rho_r (\frac{q}{q_s})^k \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho_m F_z \quad (3.14)$$

由以上给出的结果可以对比看出饱和湿空气动力学方程与非均匀饱和湿空气动力学方程的最大区别在于,在饱和湿大气中,由于水汽处处饱和,则凝结处处出现,但在非均匀饱和湿大气中,凝结的发生是与相对湿度的  $k$  次方有关,即与凝结概率函数的大小有关,正因如此,才出现了非均匀饱和。把凝结概率函数的分布场画出来,就可以看出湿大气中非均匀饱和的程度。最近, Wang and Feng(2015) 和 Wang and Huang(2018)通过引入比水和最大气载比水概念,改进了非均匀饱和湿空气的动力学方程,但是仅限于理论发展,还缺乏实际天气过程的验证。

## 4 大气动热力物理量及其组合的动力因子在实际天气分析中的应用

对大尺度系统来说,由于系统中发生饱和湿空气的区域较小,整体看可按未饱和湿空气,甚至视为干空气来处理。也就是用干大气动热力方程组来研究就行了。在热动力学方面用干位温  $\theta = T \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\kappa}{\gamma}}$  来

表达,或用熵  $S = c_p \ln \theta + c$  来表达,在绝热情况下有  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  或  $\frac{dS}{dt} = 0$ ,在非绝热情况下有  $\frac{dS}{dt} = c_p \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{Q}{T}$  来表达。这些在研究大尺度运动中是有效的。在动力方面,用干大气动量方程就可以了,保持了质量守恒,并由动量方程的转化方程即涡度方程可推导出大尺度运动中的位涡方程,表达式为  $Q = \frac{\xi \cdot \nabla \theta}{\rho_d}$ 。对未饱和湿空气而言,与干空气的主要区别在于用虚温  $T_v$  代替了干空气温度  $T$ ,所以满足质量守恒,在所有方程中只把干空气温度用虚温来代替就行了,其结果与干空气动力学结果十分接近,没有本质区别。

饱和湿空气就不一样了,由于水汽饱和会凝结出雨滴甚至出现冰晶等凝聚物,这些凝聚物在湿空气中出现相对运动,如雨滴下落产生下落末速度等,这样也产生了湿空气质量的不守恒,对这种饱和湿空气动力学方程都与干空气动力学方程不同,饱和湿空气热力学中的位温叫相当位温,表达式为

$$\theta_e = \theta \exp\left(\frac{Lq_s}{c_p T}\right), \text{ 其对应的位涡称湿位涡 (表达式为 } \frac{\xi \cdot \nabla \theta_e}{\rho} \text{), 且连续方程中质量不守恒, 出现了由雨滴}$$

下落而产生的质量强迫,并把这种效应代进了动量方程中。饱和湿大气也是实际大气的一种极端情况,实际大气是非均匀饱和的,所以用饱和湿大气推导出的物理量来诊断大气实际现象会出现虚假不真实的情况,不能真正描述实际大气的变化及演变。正因如此,非均匀饱和湿大气的动热力学方程组才是最能真实描述实际大气运动及热力变化的方程组。表征非均匀饱和和大气的物理量如广义位温,表达式为

$$\theta^* = \theta \exp\left[\frac{Lq_s}{c_p T} \left(\frac{q}{q_s}\right)^k\right], \text{ 由此, Gao et al.}$$

(2004) 提出了基于广义位温的广义位温  $\frac{\xi \cdot \nabla \theta^*}{\rho}$ ,

在暴雨、高温高湿天气、低涡或台风的移动等等研究中得到广泛应用(段廷扬等,2007;周玉淑等,2007;周玉淑,2009)。基于描述大气运动的基本动热力学物理量,结合天气系统发生发展的动热力过程得到的动力因子(高守亭等,2013)在实际高影响天气的分析和预报中得到了很好的应用。

在暴雨分析和预报方面,Cao et al.(2011)给出

了广义位温的图像解释。周玉淑和朱科峰(2010)针对2003年江淮流域暴雨过程、2004年华北一次暴雨过程以及2006年碧利斯台风(图1)中的位温、相当位温和广义位温分布的对比分析表明:即使是在暴雨系统中,湿空气的相对湿度也达不到100%,饱和湿空气相当位温的引入条件不能完全满足。而广义位温的定义用一个表达式就可以表示出干大气、未饱和湿大气以及饱和湿大气这三种大气状态的位温,而位温和相当位温则是广义位温的特殊情况。除了可以衔接干大气位温和饱和湿大气的相当位温外,广义位温包含了水汽由干到湿再到饱和的变化过程,更好地体现了大气中水汽的实际分布和变化特征。

有关动力因子在暴雨研究中的应用分析有很多,如:Yang and Wang(2009)及冉令坤等(2011)及孙颖姝等(2019)利用对流涡度矢量、湿热力平流参数和波作用密度等动力因子对暴雨或强对流降水过程进行的诊断分析表明,这些动力因子能够综合描述降水系统水平风场垂直切变与涡度扰动以及位温平流和广义位温及其扰动的经向梯度等动力学和热力学特征,在降水区对流层中低层表现为强信号,在非降水区表现为弱信号,对观测降水有很好的指示作用,用动力因子定义的相当降水量来评估动力因子的预报效果也表明动力因子对降水也有一定的预报效果。Yang and Gao(2006,2014)、Yang et al.(2007a,2007b,2014a,2014b)将广义位温引入暴雨过程的里查逊数、 $Q$  矢量及锋生函数的研究中,在暴雨诊断分析中也得到不错的结果。此外,对流涡度矢量、热力切变平流参数、波作用密度等动力因子(赵宇和高守亭,2008;齐彦斌等,2010;王培等,2012;冉令坤等,2013,2014;王成鑫等,2013;李琴等,2016)可反映大气运动中的强垂直上升运动、切变及波动活动特性等,在我国不同地区暴雨诊断和机理分析中也有较好的效果。在登陆台风暴雨的分析中,如图2所示(冉令坤等,2013),2009年莫拉克台风刚登陆台湾岛,西侧眼墙位于台湾海峡,大陆地区受其影响较小,闽浙沿海有少量降水,并伴有波作用密度低值区,代表较弱的扰动热量输送。8日1800 UTC,台风移入台湾海峡,其西侧眼墙覆盖大陆,降水增大,波作用密度明显增大,两个高值中心分别位于27°N上空3 km和6 km高度附近。该高值中心主要由扰动纬向风的垂直切变和扰动广义位温的纬向梯度造成,代表降水区有较强的扰动热量

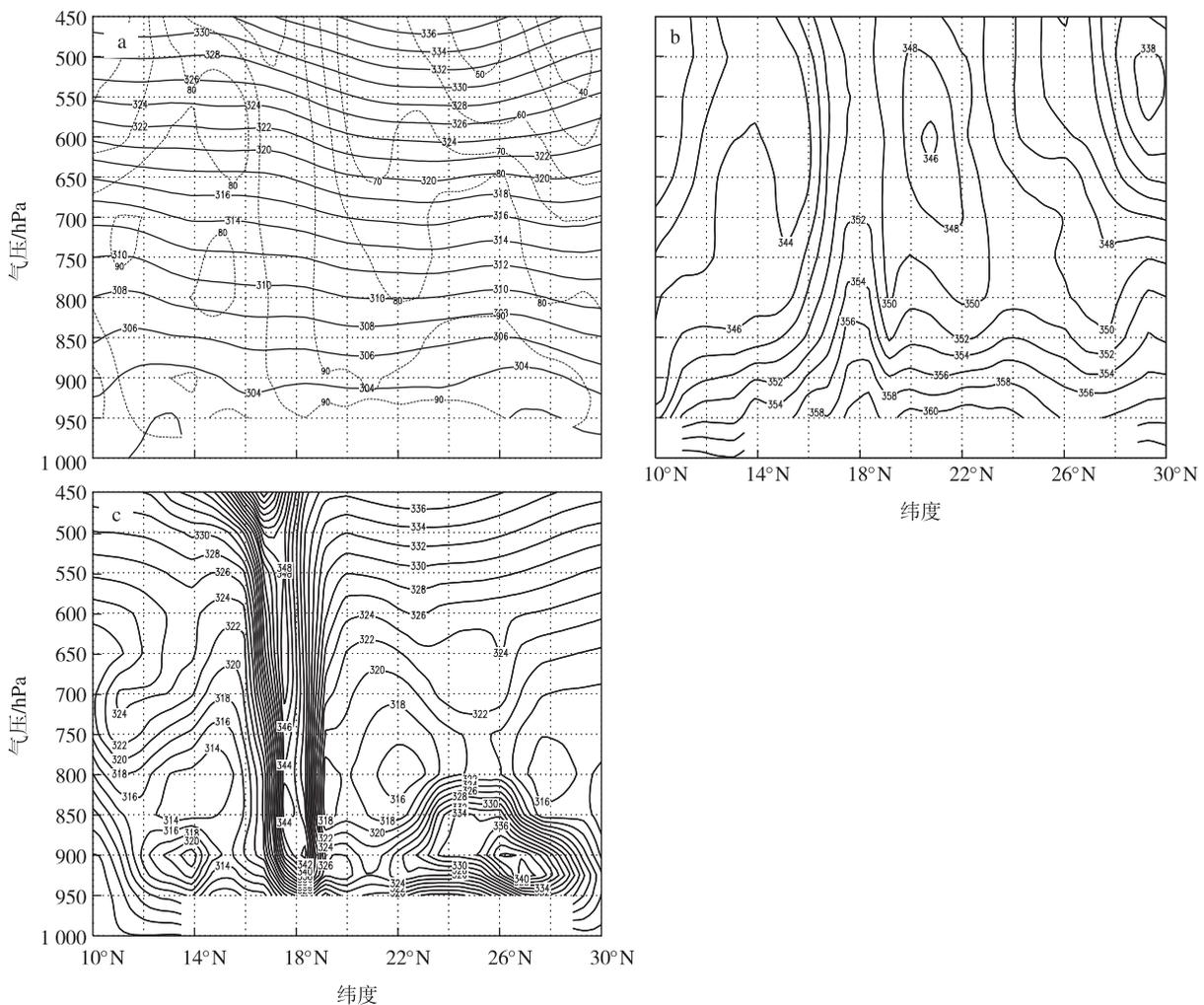


图1 2006年7月12日00时碧利斯台风的位温(实线)及相对湿度(虚线)(a)、相当位温(b)和广义位温(c)沿129°E剖面(单位:K)(周玉淑和朱科峰,2010)

Fig.1 (a)The cross-sections of potential temperature(solid in) and relative humidity(dashed line), (b) e-equivalent potential temperature and (c) generalized potential temperature along 129°E at 0000 UTC 12 July, 2006 (unit:K) (Zhou and Zhu, 2010)

的纬向输送。9日1800(世界时,下同),台风登陆后,波作用密度明显减小,扰动热量输送减弱。波作用密度所描述的扰动热量输送主要出现在降水区对流层中低层,随台风登陆而逐渐减弱,该扰动输送使得广义位温垂直梯度的局地变化减小,进而导致位势稳定度的变化趋缓。

在非均匀饱和和大气位涡的扩展研究方面,高守亭(2007)指出,湿大气中还可以出现水汽位涡,表达式为  $Q_q = \frac{\xi \cdot \nabla q}{\rho}$ , 因为水汽分布不均匀,所以有些地方水汽梯度明显,由此产生的水汽位涡在诊断台风移动路径等方面有很好的示踪应用。同时,考虑广义位涡梯度效应推导的二阶位涡(Gao et al., 2014; Li et al., 2016)在暴雨诊断方面也有较好应用。

## 5 总结和讨论

目前,湿空气动力学研究,主要从天气系统发展演变过程中的动热力方程、热量方程、能量方程等进行诊断和理论解释,并把这些方程用于暴雨、台风、强对流、冰雹、大风、高温热浪、雾等各类不同的高影响天气过程的分析预报。在气象学者们持之以恒的努力下,经过几十年的发展,湿空气动力学的研究经历了未饱和湿大气、饱和湿大气再到非均匀饱和湿大气的历程,对空气动力学状态及演变过程的描述,逐渐从理想状态向真实状况靠近,在描述湿大气的热力相变状态方面取得了长足进展。水汽凝结几率函数的引入,弥补了干大气与饱和湿大气之间的过渡状态,对水汽相变过程的描述与实际

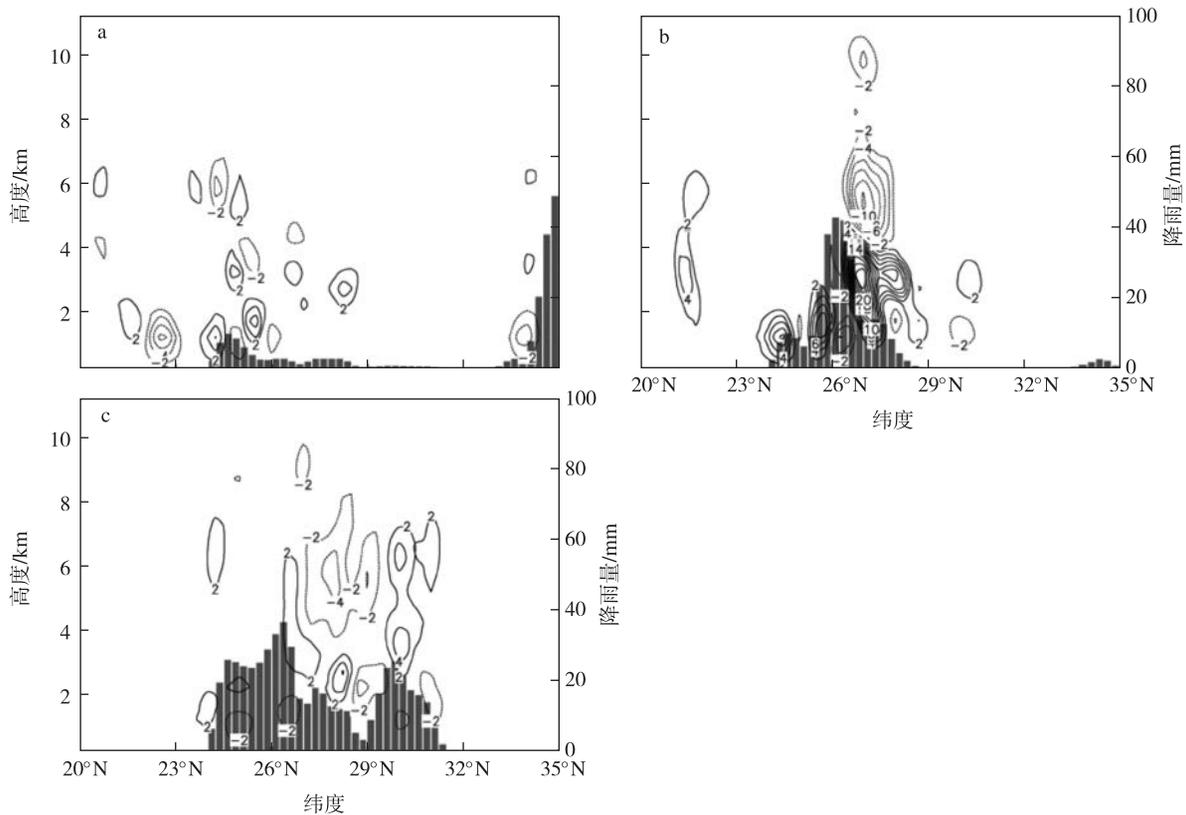


图2 2009年8月7日18时(a),8日18时(b)和9日18时(c)波作用密度 $A$ (等值线, $10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ )沿着 $119^\circ\text{E}$ 的经向-垂直剖面的分布(灰色直方图代表观测的6 h累积降水,单位:mm)(冉令坤等,2013)

Fig.2 (a)The meridional-vertical cross-section of  $A$ (unit: $10^{-6} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ) at 1800 UTC 7 Aug, (b) 1800 UTC 8 Aug, and (c) 1800 UTC 9 Aug along  $119^\circ\text{E}$ , where the gray thin bar denotes the observation of 6 h accumulated surface rainfall (unit:mm) (Ran et al., 2013)

大气观测得到的凝结现象更为一致。

湿大气的研究,一定离不开水汽相变问题的描述。目前的水汽凝结几率函数的引入,对水汽相变的描述较饱和湿大气更好,但是其幂指数的取值问

题还是通过统计后给出,不同的天气过程中可能最佳值并不一样,如何克服这个问题,或者是否有其他函数来更好描述湿大气中真实的水汽相变过程,仍然是湿空气动力学研究需要重点考虑的内容。

## 参考文献(References)

- Andrews D G, 2000. An introduction to atmospheric physics [M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bannon P R, 2002. Theoretical foundations for models of moist convection [J]. *J Atmos Sci*, 59(12): 1967-1982.
- Betts A K, Dugan F J, 1973. Empirical formula for saturation pseudoadiabats and saturation equivalent potential temperature [J]. *J Appl Meteor*, 12(4): 731-732.
- Bolton D, 1980. The computation of equivalent potential temperature [J]. *Mon Wea Rev*, 108(7): 1046-1053.
- Cao J, Zhou Y S, Gao S T, 2011. A brief report of graphic explanations for generalized potential temperature in the non-uniformly saturated atmosphere [J]. *Atmos Ocean Sci Lett*, 4(3): 162-167.
- 段廷扬, 邓国, 王东海, 2007. 广义湿位涡与暴雨落区预报的诊断分析 [J]. *大气科学*, 31(6): 1301-1307. Duan T Y, Deng G, Wang D H, 2007. Diagnostic analysis of generalized moist potential vorticity and forecast of torrential rain region [J]. *Chin J Atmos Sci*, 31(6): 1301-1307. (in Chinese).
- Durrant D R, Klemp J B, 1982. On the effects of moisture on the brunt-väisälä frequency [J]. *J Atmos Sci*, 39(10): 2152-2158.
- Dutton J A, 1976. *The leaseless wind* [M]. New York: McGraw-Hill Inc.
- 高守亭, 2007. 大气中尺度运动的动力学基础及预报方法 [M]. 北京: 气象出版社. Gao S T, 2007. Dynamic basis and prediction method of mesoscale motion of atmosphere [M]. Beijing: China Meteorological Press (in Chinese).
- Gao S T, Wang X R, Zhou Y S, 2004. Generation of generalized moist potential vorticity in a frictionless and moist adiabatic flow [J]. *Geophys Res*

- Lett,31(12):L12113.doi:10.1029/2003GL019152.
- 高守亭,冉令坤,李娜,等,2013.集合动力因子暴雨预报方法研究[J].暴雨灾害,32(4):289-302. Gao S T,Ran L K,Li N,et al.,2013.The "Ensemble Dynamic Factors" approach to predict rainstorm[J].Torrential Rain Disasters,32(4):289-302.(in Chinese).
- Gao S T,Xu P C,Li N,et al.,2014.Second order potential vorticity and its potential applications[J].Sci China Earth Sci,57(10):2428-2434.
- 吉崎正宪,加藤辉,2009.暴雨与暴雪之气象学[M].张泉湧译.台北:五南图书出版股份有限公司. Masanori Yoshizaki, Teruyuki Kato,2009.Meteorology of heavy rain and blizzard[M].Taipei:Wunan book publishing Co.,Ltd.(in Chinese).
- 雷雨顺,1980.关于特大暴雨的几个问题[M]. Lei Y S,1980.Some methods about terrainrain[M].(in Chinese).
- 雷雨顺,吴宝俊,吴正华,1978.用不稳定能量理论分析和预报夏季强风暴的一种方法[J].大气科学,2(4):297-306. Lei Y S,Wu B J,Wu Z H,1978.A method of analyzing and forecasting severe storms in summer by using the theory of unstable energy[J].Chin J Atmos Sci,2(4):297-306.(in Chinese).
- Li N,Gao S T,Ran L K,2016.A PV-gradient related quantity in moist atmosphere and its application in the diagnosis of heavy precipitation[J].Atmos Res,167:285-297.
- 李琴,杨帅,崔晓鹏,等,2016.四川暴雨过程动力因子指示意义与预报意义研究[J].大气科学,40(2):341-356. Li Q,Yang S,Cui X P,et al.,2016.Diagnosis and forecasting of dynamical parameters for a heavy rainfall event in Sichuan Province[J].Chin J Atmos Sci,40(2):341-356.(in Chinese).
- 刘栋,高守亭,2003.饱和湿大气 Brun-Vaaisaelae 频率及修正的相当位温[J].气象学报,61(3):379-383. Liu D,Gao S T,2003.Saturated wet atmosphere Brunt-Vaaisaelae frequency and corrected equivalent temperature[J].Acta Meteorologica Sinica,61(3):379-383.(in Chinese).
- 罗会邦,王两铭,1978.暴雨天气动力学一些问题的探讨(II):暴雨落区天气和动力学分析[J].中山大学学报(自然科学版),17(1):28-36. Luo H B,Wang L M,1978.Heavy rain weather dynamics problems discussed (II):analysis of weather and dynamics in rain-fall area [J].Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,17(1):28-36.(in Chinese).
- Ooyama K V,1990.A thermodynamic foundation for modeling the moist atmosphere[J].J Atmos Sci,47(21):2580-2593.
- Ooyama K V,2001.A dynamic and thermodynamic foundation for modeling the moist atmosphere with parameterized microphysics[J].J Atmos Sci,58(15):2073-2102.
- 齐彦斌,冉令坤,洪延超,2010.强降水过程中热力切变平流参数的诊断分析[J].大气科学,34(6):1201-1213. Qi Y B,Ran L K,Hong Y C,2010.Diagnosis of thermodynamic shear advection parameter in heavy rainfall events[J].Chin J Atmos Sci,34(6):1201-1213.(in Chinese).
- 冉令坤,周玉淑,杨文霞,2011.强对流降水过程动力因子分析和预报研究[J].物理学报,60(9):807-817. Ran L K,Zhou Y S,Yang W X,2011. Analysis and forecasting of heavy-rainfall event by strong convection[J].Acta Phys Sin,60(9):807-817.(in Chinese).
- 冉令坤,刘璐,李娜,等,2013.台风暴雨过程中位势散度波作用密度分析和预报应用研究[J].地球物理学报,56(10):3285-3301. Ran L K,Liu L,Li N,et al.,2013.The analysis of the potential-divergence wave activity density and its application to typhoon precipitation[J].Chin J Geophys,56(10):3285-3301.(in Chinese).
- 冉令坤,齐彦斌,郝寿昌,2014."7.21"暴雨过程动力因子分析和预报研究[J].大气科学,38(1):83-100. Ran L K,Qi Y B,Hao S C,2014. Analysis and forecasting of heavy rainfall case on 21 July 2012 with dynamical parameters[J].Chin J Atmos Sci,38(1):83-100.(in Chinese).
- Ran L K,Gao S T,Cao J,2014.Continuity and momentum equations for moist atmospheres[J].Chin Phys B,23(1):19201.doi:10.1088/1674-1056/23/1/019201.
- Satoh M,2003.Conservative scheme for a compressible nonhydrostatic model with moist processes[J].Mon Wea Rev,131(6):1033-1050.
- Schubert W H,Hausman S A,Garcia M,et al.,2001.Potential vorticity in a moist atmosphere[J].J Atmos Sci,58(21):3148-3157.
- 孙颖姝,周玉淑,王咏青,2019.一次双高空急流背景下南疆强降水事件的动力过程和水汽源分析[J].大气科学,43(5):1041-1054. Sun Y S,Zhou Y S,Wang Y Q,2019.Analysis of dynamic process and moisture source on a heavy precipitation event in southern Xinjiang associated with the double upper-level jet[J].Chin J Atmos Sci,43(5):1041-1054.(in Chinese).
- 王成鑫,高守亭,梁莉,等,2013.动力因子对地形影响下的四川暴雨落区的诊断分析[J].大气科学,37(5):1099-1110. Wang C X,Gao S T,Liang L,et al.,2013.Diagnostic analysis of dynamical parameters for Sichuan rainstorm influenced by terrain[J].Chin J Atmos Sci,37(5):1099-1110.(in Chinese).
- 王两铭,罗会邦,1978.暴雨天气动力学一些问题的探讨(I):分析工具[J].中山大学学报(自然科学版),17(1):20-27. Wang L M,Luo H B,1978.Heavy rain weather dynamics problems discussed (I):analysis tools [J].Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,17(1):20-27.(in Chinese).
- 王培,沈新勇,高守亭,2012.一次东北冷涡过程的数值模拟与降水分析[J].大气科学,36(1):130-144. Wang P,Shen X Y,Gao S T,2012.A numerical study and rainfall analysis of a cold vortex process over northeast China[J].Chin J Atmos Sci,36(1):130-144.(in Chinese).
- 王兴荣,吴可军,1995.湿空气动力学中若干问题的探讨[J].气象科学,15(1):9-17. Wang X R,Wu K J,1995.An approach to the dynamics of moist air[J].Sci Meteorol Sin,15(1):9-17.(in Chinese).
- 王兴荣,魏鸣,2007.与天气系统发生和发展有关的非均匀饱和湿位涡理论分析[J].热带气象学报,23(5):459-466. Wang X R,Wei M,2007. Theoretical analysis of non-uniform saturated moist potential vorticity( numpv) associated with the occurrence and development of weather sys-

- tems[J]. *J Trop Meteor*, 23(5):459-466. (in Chinese).
- Wang X R, Feng Y, 2015. The introduction of specific water and maximum airborne specific water & the improvement of dynamic equations on non-uniform saturated moist atmosphere[J]. *Atmos Clim Sci*, 5(3):245-256.
- Wang X, Huang Y, 2018. Generalized dynamic equations related to condensation and freezing processes[J]. *J Geophys Res*, 123(2):882-889.
- 王兴荣, 石春娥, 汪钟兴, 1997. 非静力平衡条件下的垂直坐标变换及湿空气动力学方程组[J]. *大气科学*, 21(5):557-563. Wang X R, Shi C N, Wang Z X, 1997. The vertical coordinate transformation and the dynamics equations of moist air based on the nonstatic equilibrium[J]. *Sci Atmos Sin*, 21(5):557-563. (in Chinese).
- 王兴荣, 吴可军, 石春娥, 1999. 凝结几率函数的引进和非均匀饱和湿空气动力学方程组[J]. *热带气象学报*, 15(1):64-70. Wang X R, Wu K J, Shi C E, 1999. Introduction of condensation probability function and non-uniform saturated moist aerodynamics equations[J]. *J Trop Meteorol*, 15(1):64-70. (in Chinese).
- 谢义炳, 1978. 湿斜压大气的天气动力学问题[C]//暴雨文集. 长春:吉林人民出版社:1-15. Xie Y B, 1978. Weather dynamics of wet baroclinic atmosphere[C]//Rainstorms. Changchun: Jilin People's Press:1-15. (in Chinese).
- Yang S, Gao S T, 2006. Modified Richardson number in non-uniform saturated moist flow[J]. *Chinese Phys Lett*, 23(11):3003-3006.
- Yang S, Wang D H, 2009. Diagnostic analyses of the modified convective vorticity vector in non-uniformly saturated moist flow[J]. *Atmos Ocean Sci Lett*, 2(3):142-147.
- Yang S, Gao S T, 2014. Derivation of baroclinic Ertel-rossby invariant-based thermally-coupled vorticity equation in moist flow[J]. *Chinese Phys B*, 23(11):119201.
- Yang S, Gao S T, Wang D H, 2007a. A study of Richardson number and instability in moist saturated flow[J]. *Chinese J Geophys*, 50(2):365-375.
- Yang S, Gao S T, Wang D H, 2007b. Diagnostic analyses of the ageostrophic Q vector in the non-uniformly saturated, frictionless, and moist adiabatic flow[J]. *J Geophys Res*, 112(D9):D09114. doi:10.1029/2006JD008142.
- Yang S, Gao S T, Chen B, 2014a. The derivation of moist baroclinic Ertel-Rossby invariant in fast manifold and its application to typhoons[J]. *Sci China Earth Sci*, 57(6):1374-1382.
- Yang S, Gao S T, Lu C G, 2014b. A generalized frontogenesis function and its application[J]. *Adv Atmos Sci*, 31(5):1065-1078. doi:10.1007/s00376-014-3228-y.
- 赵宇, 高守亭, 2008. 对流涡度矢量在暴雨诊断分析中的应用研究[J]. *大气科学*, 32(3):444-456. Zhao Y, Gao S T, 2008. Application of the convective vorticity vector to the analysis of a rainstorm[J]. *Chin J Atmos Sci*, 32(3):444-456. (in Chinese).
- 周玉淑, 2009. 广义湿位涡在江淮流域暴雨分析和预报中的应用[J]. *大气科学*, 33(5):1101-1110. Zhou Y S, 2009. Application of generalized moist potential vorticity to analysis and forecast of the torrential rain over the Changjiang-Huaihe River Basin[J]. *Chin J Atmos Sci*, 33(5):1101-1110. (in Chinese).
- 周玉淑, 朱科锋, 2010. 湿大气的广义位温与干大气位温及饱和湿大气相当位温的比较[J]. *气象学报*, 68(5):612-616. Zhou Y S, Zhu K F, 2010. Comparisons between the generalized potential temperature in the moist atmosphere and the potential temperature in the dry atmosphere and the equivalent potential temperature in the saturated moist atmosphere[J]. *Acta Meteorol Sin*, 68(5):612-616. (in Chinese).
- 周玉淑, 曹洁, 王东海, 2007. 非均匀饱和和广义湿位涡在暴雨分析与预测中的应用[J]. *应用气象学报*, 18(6):754-759. Zhou Y S, Cao J, Wang D H, 2007. Application of generalized moist potential vorticity in non-uniformly saturated atmosphere to torrential rain forecast[J]. *J Appl Meteorol Sci*, 18(6):754-759. (in Chinese).

## Advances in the kinetic thermodynamics of moist air and their application

GAO Shouting<sup>1,2,4</sup>, ZHOU Yushu<sup>1,2,3</sup>, RAN Lingkun<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Key Laboratory of Cloud-Precipitation Physics and Severe Storms (LACS), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

<sup>2</sup>University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

<sup>3</sup>Institute of Desert Meteorology, China Meteorological Administration, Ürümqi 830002, China;

<sup>4</sup>Guizhou Mountain Climate and Resources Laboratory, Guiyang 550002, China

In this study, the kinetic equations, thermodynamic equations, energy equations and continuous equations of unsaturated moist atmosphere, saturated moist atmosphere and non-uniformly saturated moist atmosphere are combined by reviewing the current research progress of moisture atmospheric thermal dynamics. It is observed that the most notable difference between the saturated and the non-uniformly saturated moist atmosphere momentum equation is the distinctive method that is used while dealing with the condensation process. In saturated moist air it is difficult to distinguish the veritable moisture condensation area, as the hydrometeors caused by saturation probably appear ubiquitously, while it is easy to discriminate between the moist condensation area and non-condensation area in a non-uniformly saturated moist atmosphere. Due to the fact that water vapor will not condensate in the area with smaller relative humidity, as the generation of the moist condensation is concerned with the exponentiation of relative humidity (as well as the distribution of the condensation probability function), this condensation procedure is more similar to that in an actual atmospheric environment. Furthermore, this paper summarizes the application of the non-uniformly distributed dynamical and thermal physical quantities of moisture condensation saturation in moist air as observed in high-impact weather analysis, and finally discusses of the dominant problems that may arise in the future study of moisture atmospheric dynamics.

**moist atmosphere; non-uniformly saturation; research progress; meteorology and application**

doi: 10.13878/j.cnki.dqkxxb.20191018012

(责任编辑:刘菲)